SAVEZ DRUŠTAVA MATEMATIČARA I FIZIČARA FNRJ

MATEMATIČKO FIZIČKI LIST

ZA UČENIKE SREDNJIH ŠKOLA

4

GODINA VIII.
ZAGREB
1957 — 58

IZDAJE DRUŠTVO MATEMATIČARA I FIZIČARA NRH

»MATEMATIČKO-FIZIČKI LIST za učenike srednjih škola« izlazi u 4 broja po 40 stranica. Za vrijeme ferija list ne izlazi.
Pretplata za 4 broja iznosi Din 200. — Pojedini se broj prodaje po Din 60.— Pretplatu i narudžbe slati na adresu: »MATEMATIČKO-FIZIČKI LIST«, Zagreb, Ilica 16/III., pošt. pretinac 165 ili na čekovni račun broj 40-KB-6-Ž-1884 — Pretplata se može slati i poštanskom uplatnicom.

SADRŽAJ

	Strana
Miho Cerineo, ZETA	129
Петровић Владимир, Тежиште четвороугла	131
Vujnović Vladis, Izračunavanje veličine meteora	133
Škarica Stjepan, O jednom Diofantovom zadatku	136
Penzar Ivo, Fizikalne osebine i klasifikacija oblaka	138
Dr. B. Marković, Prof. dr. D. Pejnović	141
Iz moje radionice i laboratorija	
Određivanje mehaničkog ekvivalenta topline *(E. Vernić)*	142
Zanimljivosti i razno: Такмичење ученика београдских гимназија у математици — Srednešolski tečaj za matematiko v Ljubljani — Такмичење из математике у гимназији, »Св. Марковић«, Ниш — Takmičenje iz matematike u Zagrebu — Проблем 12 кугли (решење) — Rješenje problema o zlatnicima iz prošlog broja	148
Nove knjige: *Dr. J. Lončar*, Osnovi elektrotehnike	148
Zadaci i rješenja: A. Zadaci iz matematike — B. Zadaci iz fizike — C. Rješenja iz matematike — D. Rješenja iz fizike	148
Razgovor s čitaocima	156
Zadaci na ispitu zrelosti 1956./57.	160
Nagrađeni rješavatelji zadataka	160
Rješenje ukrštenice i nagrađeni rješavatelji	3. str. omota
Popis pretplatnika Mat. fiz. lista za ovu školsku godinu	3. str. omota

Uređivački odbor:

AHLIN FRANC, profesor VPŠ, Ljubljana
BANDIĆ IVAN, profesor VPŠ, Beograd
HRABAK FRANJO, dir. II. gimn., Zagreb
KOSMAJAC MOMČILO, prof. g., Cetinje
KRAJNOVIĆ MILAN, profesor, Zagreb
LAZIĆ MARKO, direktor VPŠ, Mostar
NIKOLOVSKI TOME, profesor, Skopje
ŠINDLER GUSTAV, profesor, Zagreb
VERNIĆ ELZA, profesor, Zagreb

Glavni urednici:

MARKOVIĆ dr. BRANIMIR, docent
Prirodoslovno-matematičkog fakulteta Zagreb
ŠKREBLIN STJEPAN, h. prof. VPŠ, Zagreb

VLASNIK SAVEZ DRUŠTAVA MATEMATIČARA I FIZIČARA FNRJ
IZDAJE DRUŠTVO MATEMATIČARA I FIZIČARA NAR. REPUBLIKE HRVATSKE

Tisak Grafičkog zavoda Hrvatske

SAVEZ DRUŠTAVA MATEMATIČARA I FIZIČARA FNRJ

MATEMATIČKO FIZIČKI LIST

ZA UČENIKE SREDNJIH ŠKOLA

GODINA VIII.
ZAGREB
1957 — 58

IZDAJE DRUŠTVO MATEMATIČARA I FIZIČARA NRH

Uređivački odbor:

AHLIN FRANC, profesor VPŠ, Ljubljana
BANDIĆ IVAN, profesor VPŠ, Beograd
HRABAK FRANJO, dir. II. gimn., Zagreb
KOSMAJAC MOMČILO, prof. g., Cetinje
KRAJNOVIĆ MILAN, profesor, Zagreb
LAZIĆ MARKO, direktor VPŠ, Mostar
NIKOLOVSKI TOME, profesor, Skopje
ŠINDLER GUSTAV, profesor, Zagreb
VERNIĆ ELZA, profesor, Zagreb

Glavni urednici:

MARKOVIĆ, dr. BRANIMIR, docent Prirodoslovno-matematičkog fakulteta, Zagreb
ŠKREBLIN STJEPAN, h. prof. VPŠ, Zgb

TISAK GRAFIČKOG ZAVODA HRVATSKE — ZAGREB

SADRŽAJ:

1. ČLANCI

Strana

Alaga Gaja: Modeli atomske jezgre 7, 56
Bazjanac Davorin: Prvi umjetni Zemljini sateliti 41
Bonefačić Ante: Zanimljive optičke pojave na Jadranu 15
Бошковић Раде: О конструкцији планиметра на основу математичке анализе о рачунању површине парцеле 63
Cerineo Miho: ZETA 129
Cindro Nikola: Scintilacioni brojači 89
Čepinac Nikola: Neke osobine gnomona 48
Ćirić Nikola: Rešavanje jednog tipa trigonometriskih nejednačina pomoću jediničnog kruga 93
Dimić Platon: Jedno zanimljivo proširenje Neperovih štapića 100
Ђерасимовић Божидар: Један задатак о троуглу 3
Космајац Момчило: Птоломејева теорема 102
Marković Branimir: Prof. dr. Dušan Pejnović 141
Mihnjević Danilo: Grafik sinusoide pomoću grafika argumenta 45
Paić Mladen: Porast nivoa radioaktivnosti uzrokovan nuklearnim eksplozijama 1
Penzar Ivo: Fizikalne osebine i klasifikacija oblaka 138
Перовић Брана: Електромагнетни сепаратор изотопа у Винчи 106
Петровић Владимир: Тежиште четвороугла 131
Rauter Aleksander: Jožef Ressel 60
Станојевић Б.: О једнако састављеним полигонима 12
Škarica Stjepan: O aritmetičkim nizovima k-toga reda 9, 53
Škarica Stjepan: O jednom Diofantovom zadatku 136
Ušan Janez: Še nekaj o konstrukciji kvadratnega korena kompleksnega števila 17
Varićak Milena: Poluvodiči i njihova primjena u nauci i tehnici 50
Varićak Milena: Primjena poluvodiča kod kristalnih dioda i tranzistora . . . 96
Vujnović Vladis: Izračunavanje veličine meteora 133

2. IZ MOJE RADIONICE I LABORATORIJA

Kunstelj: Pokus za provjeravanje zakona za jednoliko ubrzano gibanje pomoću krinolinskog aparata 109
Sarjanović i *Servis:* Mjerenje akceleracije pomoću krinolinskog aparata 110
Vernić: Određivanje mehaničkog ekvivalenta topline 142
Verona: Kako ćemo sami izgraditi spektroskop 65

3. ZANIMLJIVOSTI I RAZNO

Takmičenje učenika srednjih škola NR Makedonije iz matematike, 19. — Supernove i radioaktivnost, 20. — Poluvodiči kao termoelektrični generatori, 20 .— Katalitička nuklearna reakcija, 21. — Kako bismo odredili brojeve, kojih se kvadrati

svršavaju istim tim brojevima?, 22. — Naučnici se zabavljaju, 22. — S tri dvojke, 25. — Možda ste zaboravili, 40. — Satelit i njegova uloga u ispitivanju visoke atmosfere, 68. — Jedan način određivanja starosti svemira, 70. — Rešenje marsovskog problema, 71. — Релација полупречника троуглу описаног и уписаних кругова, 71. — Najveći dosad poznati prosti broj, 72. — Kako je nastao gramofon, 73. — Такмичење ученика београдских гимназија у математици, 111., 144. — Neke pojedinosti o prvim umjetnim satelitima, 111. — О »левом« и »десном« у природним наукама, 113. — Проблем 12 кугли, 114., 147. — Još jedan problem o vaganju, 114., 148. — Kako jedriti uz vjetar, 114. — »Nestala« dužina, 115. — Srednjoškolski tečaj za matematiko v Ljubljani, 145. — Такмичење из математике у гимназији »Св. Марковић« у Нишу, 147. — Takmičenje iz matematike u Zagrebu, 147. — Razgovor s čitaocima, 156.

4. NOVE KNJIGE

Smolec: Matematika i stvarnost, 25. — *Paić:* Fizička mjerenja III. dio, 26. — Članci iz matematike za učenike srednjih škola, 74. — Kvalifikacioni ispit iz matematike 1956. god., 75. — *Mitrinović:* Metod matematičke indukcije, 75. — *Kurepa-Smolec-Škreblin:* Infinitezimalni račun, 75. — *Lončar:* Osnovi elektrotehnike, 148.

5. ZADACI I RJEŠENJA

A. Zadaci iz matematike: zad. 266. do 279., str. 26. — zad. 280. do 293., str. 76. — zad. 294. do 307., str. 115. — zad. 308. do 320., str. 148.

B. Zadaci iz fizike: zad. 141. do 145., str. 27. — zad. 146. do 150., str. 77. — zad. 151. do 155., str. 116. — zad. 156. do 160., str. 149.

C. Rješenja zadataka iz matematike: zad. 253. do 265., str. 27. — zad. 266. do 279., str. 77. — zad. 280. do 293., str. 116. — zad. 294. do 303., str. 149.

D. Rješenja zadataka iz fizike: zad. 136. do 140., str. 33. — zad. 141. do 145., str. 83. — zad. 146. do 150., str. 123. — zad. 151. do 155., str. 155.

Nagrađeni rješavatelji zadataka, str. 160.

6. VJEŽBE ZA UČENIKE VIŠIH RAZREDA GIMNAZIJA I SLIČNIH ŠKOLA

Str. 35., 85., 124.

7. ZADACI NA ISPITU ZRELOSTI 1956./57.

Str. 125., 160.

8. VJEŽBE ZA UČENIKE OSMOGODIŠNJIH ŠKOLA

Str. 38., 87., 128.

9. KRIŽALJKE

Matematička ukrštenica *(N. Šnauc)*, 3. str. omota 1. broja; rješenje 4. str. omota 2. broja.

Matematička križaljka *(P. Kulišić)*, 3. str. omota 2. broja; rješenje 4. str. omota 3. broja.

Математичка укрштеница *(С. Надрљански)*, 3 стр. омота 3. броја; решење 3. стр. омота 4. броја.

MATEMATIČKO-FIZIČKI LIST

ZA UČENIKE SREDNJIH ŠKOLA

GODINA VIII. BROJ 4 | ZAGREB | ŠKOL. GOD. 1957. — 1958.

ZETA

MIHO CERINEO, Zagreb

Koncem januara objavljena je u engleskom časopisu *Nature* epohalna vijest: po prvi puta uspjelo je postići kontrolirano odvijanje termonuklearnih reakcija.

Princip je odavna poznat. Lake jezgre (a za to su najpogodniji deuteroni[1]) potrebno je toliko ubrzati, da u sudaru jedni sa drugima mogu savladati električne odbojne sile i doći u neposredni kontakt. Tek tada naime dolazi do *fuzije*, procesa u kojem se dvije lake jezgre (ovdje deuteroni) spajaju u jednu težu jezgru. U takvim procesima oslobađa se ogromna energija. Kad bi uspjelo potpuno iskoristiti svu energiju fuzije samo jednog grama deuterijuma,[2] to bi odgovaralo energiji, koju danas dobijamo iz sagorijevanja deset tona ugljena. Kada znamo da deuterijuma ima skoro u neiscrpnim količinama (svakih deset litara vode sadrži oko jedne petine grama deuterijuma), onda nam je jasno što znači za čovječanstvo prvi uspješan korak na putu iskorištavanja te energije. A taj korak je učinjen.

Da bi postigli fuziju deuterona, jezgre deuterijuma, moramo ih ubrzati. To možemo postići sa nekim akceleratorom, pa ih pustiti, da udaraju na metu, koja opet sadrži deuterone. To je uspjelo već 1934. Rutherfordu i Oliphantu. Međutim, time se ne dobiva mnogo. Energija, koju treba uložiti, da bi se deuterone ubrzalo do potrebnih brzina, mnogo puta je veća od one, koju bi mogli dobiti iz njihove fuzije sa deuteronima mete. Vjerojatnost, naime, da će neki deuteron pogoditi jedan deuteron u meti sa dovoljnom brzinom, izvanredno je malena, — oni obično gube energiju ionizacijom, brzina im se smanjuje do te mjere da više ne mogu savladati električno međusobno odbijanje, pa su prema tome izgubljeni za proces fuzije.

Treba dakle ići drugim mogućim putem. A taj je da se umjetno ostvare uvjeti, koji vladaju u unutrašnjosti Sunca i zvijezda. Tamo vladaju temperature od desetina i stotina milijuna stupnjeva. Na tim temperaturama toplinsko gibanje atoma je već toliko brzo, da su svi oni praktično lišeni svih svojih elektrona. Ostale su samo jezgre, koje se ogromnim brzinama kreću amo-tamo i sudaraju jedne sa drugima. U takvim uslovima lako dolazi do procesa fuzije. Ustvari, ti i slični procesi su izvor one ogromne energije, koju Sunce i zvijezde neprestano zrače u prostor. Kako se te nuklearne reakcije odvijaju u uslovima visokih temperatura, nazivamo ih *termonuklearne reakcije*.

U hidrogenskoj bombi, o kojoj smo već toliko čuli, takvi uslovi ostvaruju se primarnom eksplozijom običnog atomskog (uranskog ili plutonijevog) punjenja. U unutrašnjosti atomske bombe temperatura se diže na nekih deset milijuna stupnjeva, a to je dovoljno, da se jezgra lakih elemenata, koji su u bombi sadržani, spajaju i time oslobađaju daljnju energiju.

---

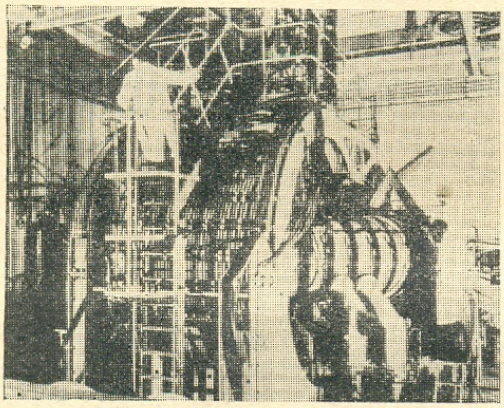
[1] Deuteron je jezgra teškog vodika; sastoji se od jednog protona i jednog neutrona; simbol D_1^2.

[2] Deuterij je atom teškog vodika. Dva atoma deuterija sa jednim atomom kisika sačinjava molekulu teške vode; simbol D_2O.

Međutim daleko je teže postići slične uvjete na kontrolirani način. Treba znati, da su za spontanu fuziju deuterona potrebne temperature od najmanje dva milijuna stupnjeva. Tek tada se naime oni kreću dovoljnim brzinama, da mogu savladati međusobnu t. zv. električnu barijeru. Jasno je, da ne možemo zatvoriti deuterijum u nekoj posudi, pa sve skupa zagrijavati, jer se bilo koji materijal topi i isparava na daleko nižim temperaturama. Osim toga, na koji način ostvariti te temperature?

Veliki uspjeh pretstavljalo je jedno otkriće u vezi sa jakim električnim pražnjenima u plinovima. Ako se naime kroz neki plin pusti jaka električna struja, a to se dade dosta lako postići pražnjenjem jakog kondenzatora, cirkularno magnetsko polje, koje se stvara oko smjera struje, prisiljava ione i elektrone da se zadržavaju u vrlo uskom području kroz koje struja teče. Što su jače struje, tim je taj efekt veći, sabijanje je jače, a time raste i pritisak i temperatura unutar područja u kojem su ioni sadržani.

Na tom efektu (Englezi su ga nazvali »pinch« efekt) osniva se uređaj nazvan ZETA. Kao što se na slici može vidjeti, osnovni dio uređaja je cijev od čvrstog aluminijuma široka 1 metar, savijena u zatvoreni krug, torus, srednjeg promjera od tri metra. U njoj se nalazi deuterijum pod vrlo niskim pritiskom (10^{-4} mm Hg), koji se pomoću posebnog uređaja (na vrhu ZETE) održava stalno u djelomično ioniziranom stanju. Sam torus okružen je sa 150 tona teškom željeznom jezgrom transformatora i to tako da, ako torus predstavlja centralnu kariku jednog lanca, onda transformatorska jezgra predstavlja dvije susjedne karike. Oko jezgre namotani su jaki električni vodovi, koji služe kao primarni namotaj. Sekundarni namotaj predstavlja sam plin u torusu. Ako se kroz primarne namotaje pusti jaka električna struja, u samom torusu inducira se preko magnetskog polja, koje nastaje u jezgri transformatora, sekundarna struja. Primarna struja dobiva se pražnjenjem 52 kondenzatora od po 31 mF. Ovi mogu sadržavati oko pola milijuna džula energije. Sekundarna struja je vrlo kratkotrajna, oko 2 — 5 hiljaditih dijela sekunde, ali je zato vrlo jaka; oko 200 000 ampera proteče u zatvorenom krugu kroz sredinu torusa u tom kratkom vremenu. Pinch efekt tu već dolazi do vrlo jakog izražaja. On je još potpomognut pomoćnim magnetskim poljem, koje se dobija propuštanjem slabije struje kroz namotaje koje možete vidjeti oko samog torusa. Posljedica toga je da se skoro sav deuterijum sabija u vrlo usko centralno područje, u kojem uslijed prolaska električne struje dolazi do ogromnog zagrijavanja ioniziranog deuterijuma. Spektroskopska mjerenja su pokazala da se postizavaju temperature od oko pet milijuna stupnjeva, a to je dovoljno da se proces fuzije počne odvijati.



Sl. 1.

Pitanje je sada na koji se način možemo uvjeriti, da je do fuzije zaista i došlo. Deuteroni (D^2_1) sadrže po jedan proton i jedan neutron. Oni se obično spajaju na taj način, da se formira jezgra lakog helija, t. j. helija 3 (He_2^3) sa dva protona i jednim neutronom. Drugi neutron (n_0^1) odnese sobom višak energije. Simbolički takvu reakciju pišemo

$$D_1^2 + D_1^2 \rightarrow He_2^3 + n_0^1 + 3.25\ \text{MeV},$$

gdje nam 3.25 MeV znači, da se u takvom jednom procesu oslobađa tolika energija. 1 MeV (milijun elektronvolti) je energija, koju bi imao jedan proton ili elektron kad bi bio ubrzan razlikom potencijala od milijun volti. U normalnim razmjerima ta je energija izvanredno malena, ali ako se takvi procesi istovremeno odvijaju sa velikim brojem jezgra, onda je energija koju bi dobili fuzijom neke mjerljive količine tvari na milijune puta veća od energije, koja bi se dobila u nekom kemijskom procesu sa tom istom količinom tvari na pr. sagorijevanjem.

Moguća je i slična reakcija

$$D_1^2 + D_1^2 \rightarrow H_1^3 + p_1^1 + 4\,\text{MeV},$$

samo što se ona rijeđe događa (p_1^1 je proton).

Jedan način da se uvjerimo da je do fuzije došlo jest, da posmatramo, da li se u momentu, kad je struja protekla kroz torus pojavljuju neutroni. To je i rađeno, i našlo se, da se svakiput, kad su u torusu postignute visoke temperature pojavljuje oko milijun slobodnih neutrona. Osim toga njihov broj naglo raste, ako se struja kroz torus pojača, a tim i poveća temperatura. To je dovoljan dokaz, da do fuzije zaista i dolazi.

Sam uređaj rađen je tako da se svakih deset sekunda može postići pražnjenje kondenzatora. Energija koja se u njih ulaže još uvijek je vrlo malena, — bila bi dovoljna taman, da uzavre četvrt litre vode. A energija, koja se dobija fuzijom je oko bilijun puta manja. S energetske tačke gledišta taj je uređaj prema tome vrlo neefikasan. Odatle mu i ime: ZETA, naime znači *Zero Energy Thermonuclear Assembly* (termonuklearni uređaj nulte energije). Da bi energija, koja se dobija fuzijom bila veća od one koju treba uložiti, potrebno će biti, da se temperature podignu na oko 100 000 000 stupnjeva. Tek tada se može očekivati, da će sav deuterijum biti podvrgnut fuziji. Na tome se sada ubrzano radi kako u Engleskoj, gdje je ZETA i sagrađena, tako i u Americi i u SSSR-u. ZETA predstavlja zaista samo prvi korak, i njen značaj je u tome što je ona pokazala put kojim treba dalje krenuti. Već mnogo je urađeno onda kada se našao način, da se iskoristi energija fisije atomskih jezgra u nuklearnim reaktorima. Nuklearna goriva, uran i torijum, sadržana su u Zemaljskoj kori u količinama za koje se smatra da bi nas mogle snabdijevati energijom za nekoliko stotina hiljada godina. Međutim tehnološki procesi za njihovo dobijanje nisu jednostavni. S druge strane, deuterijuma ima daleko više, a lakše ga je i dobiti. Po proračunima, deuterijuma ima u svim oceanima i vodama svijeta toliko, da bi energija dobivena njegovom fuzijom bila dovoljna, da pri sadašnjem potrošku energije na čitavom svijetu, traje nekoliko stotina bilijuna godina.

Ipak, treba spomenuti, da su problemi koji će se još trebati riješiti mnogobrojni i izvanredno komplicirani. Sigurno je, da će proći još izvjesno vrijeme do prvih konstrukcija za praktično korišćenje energije fuzije.

Тежиште четвороугла

ВЛАДИМИР ПЕТРОВИЋ, Ниш

Када одређујемо тежиште четвороугла,* можемо разликовати следеће случајеве:

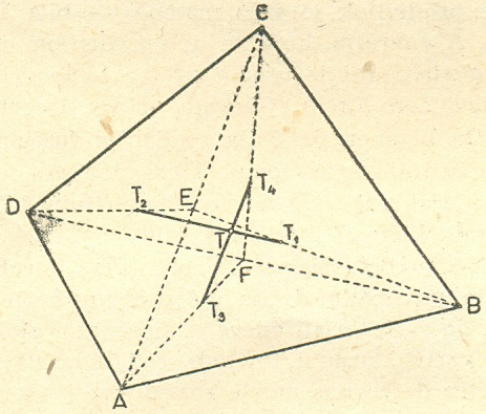
1) Четвороугао је хомогена материјална плоча, свуда исте врло мале дебљине
2) Четвороугао је ограничен хомогеним материјалним шипкама исте дебљине и
3) Четвороугао чине само четири материјалне тачке у његовим теменима.

У првом случају кажемо да одређујемо тежиште површине четворогла, у другом тежиште обима, а у трећем тежиште темена. Овде ћемо говорити само о тежишту површине.

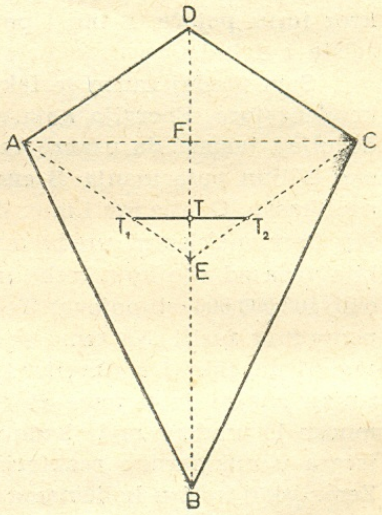
* Нап. ур. Види чланак В. Петровића: Тежиште троугла, Мат. физ. лист. год. VI. (1955—56), бр. 4, стр. 133—135.

Да бисмо одредили тежиште површине произвољног четвороугла-трапезоида $ABCD$ (сл. 1), поделићемо га дијагоналом AC на троугле ABC и ACD. Узмимо тачку E на средини AC, тада су BE и DE тежишне линије троуглова ABC и ACD. Ако узмемо још тачке T_1 и T_2 тако да је $BT_1 = 2 \cdot T_1E$ и $DT_2 = 2 \cdot T_2E$, тада је тачка T_1 тежиште троугла ABC, а T_2 је тежиште троугла ACD. Тежиште четвороугла $ABCD$ мора да се налази негде између тежишта његових делова — ABC и ACD, дакле негде између T_1 и T_2. Дуж T_1T_2, као и свака друга дуж на којој лежи тежиште, зове се тежишна линија четвороугла. Ако пак четвороугао поделимо дијагоналом BD на троугле ABD и BCD, чија су тежишта T_3 и T_4, тада је дуж T_3T_4 друга тежишна линија, на којој такође мора да се налази тежиште четвороугла. Из овога следује да тежиште четвороугла мора да лежи на пресеку дужи T_1T_2 и T_3T_4. Дакле, тежиште произвољног четвороугла могуће је увек конструктивно одредити.

Покушајмо још да и рачунски одредимо положај тежишта неких четвороуглова. Што се тиче паралелограма, лако је закључити да се њихово тежиште налази у пресеку дијагонала.



Сл. 1.



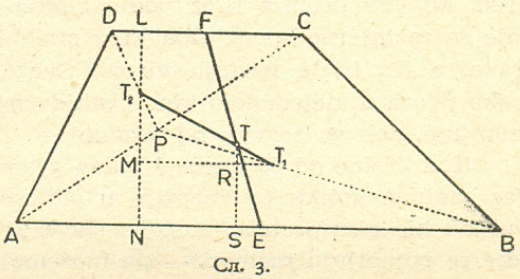
Сл. 2.

Посматрајмо сада делтоид $ABCD$ (сл. 2), чије су стране: $AB = BC \equiv a$. $AD = CD \equiv b$, дијагонале $BD \equiv d$ и $AC \equiv d_1$, које се секу у тачки F. Пошто је дијагонала d на оси симетрије, јасно је да је она истовремено и тежишна линија. Узмимо тачку E на средини дијагонале d, тада су AE и CE тежишне линије троуглова ABD и BCD. Одредимо још тачке T_1 и T_2, тежишта ових троуглова, па је T_1T_2 друга тежишна линија делтоида, а у њеном пресеку са дијагоналом d налази се тежиште T делтоида.

Да бисмо израчунали колико је тежиште удаљено од средине дијагонале d, тј. дужину TE, видимо — из троугла AEF да је $TE = \frac{1}{3}FE$. Уведимо ознаке $TE \equiv x$, $EF \equiv y$ и $AE \equiv t$, тада је t, као тежишна линија троугла ABD одређено једнакошћу: $4t^2 = 2a^2 + 2b^2 - d^2$ . . . . (1). Из троуглова AEF и ADF имамо: $\overline{AF}^2 = t^2 - y^2$ и $\overline{AF}^2 = b^2 - \left(\frac{d}{2} - y\right)^2$, а из ове две једнакости имамо: $y = \frac{1}{4d}(4t^2 + d^2 - 4b^2)$. После замене вредности за t из (1) добијамо: $y = \frac{a^2 - b^2}{2d}$. Како је $x = \frac{1}{3}y$, то је коначно: $x = \frac{1}{6} \cdot \frac{a^2 - b^2}{d}$ . . . . (2). Овај израз даје нам удаљеност тежишта делтоида од средине оне дијагонале (d), која лежи на оси симетрије и то у смеру ка пресечној тачки са другом дијагоналом.

Узмимо сада трапез $ABCD$ (сл. 3). Ако га изделимо на врло узане делиће, повлачећи паралеле са AB, тада ће тежиште сваког тог дела бити на његовој средини, а геометриско место тежишта тих делова биће дуж EF, која спаја средине паралелних страна. Према томе и дуж EF можемо узети за тежишну линију трапеза, јер на њој

мора да се налази тежиште. Другу тежишну линију одредимо на тај начин, што ћемо повући дијагоналу AC и одредити тежишта троуглова ABC и ACD, тј. тачке T_1 и T_2. Дуж T_1T_2 је друга тежишна линија, а тежиште T налази се у пресеку ове две тежишне линије.



Сл. 3.

Одредимо сада колико је тежиште T трапеза удаљено од веће паралелне стране. Повуцимо: $LN \perp AB$ (тачком T_2), $MT_1 \parallel AB$ и $TS \perp AB$. Уведимо ознаке: $AB \equiv a$ $CD \equiv b$, $LN \equiv h$, $TR \equiv y$, $TS \equiv x$. Пошто је P на средини дијагонале AC, то је тачка P подједнако удаљена од обе паралелне стране. Како је даље, $PB = 3PT_1$, и $PD = 3PT_2$, то је T_1 удаљено од AB за $\frac{h}{3}$, а исто тако и T_2 од CD. Према томе је $NM = MT_2 = T_2L = \frac{h}{3}$. Тежиште T дели дуж T_1T_2 у размери која је обрнута размери површина троуглова, тј. $T_1T : TT_2 = P_{ACD} : P_{ABC}$. Но из $P_{ABC} = \frac{ah}{2}$ и $P_{ACD} = \frac{bh}{2}$ имамо да је $T_1T : TT_2 = b : a$, а одавде је: $(T_1T + TT_2) : T_1T = (a+b) : b$ или $T_1T_2 : T_1T = (a+b) : b \ldots (3)$. Из сличности троуглова MT_1T_2 и RT_1T имамо: $T_1T_2 : T_1T = MT_2 : RT$ односно $T_1T_2 : T_1T = \frac{h}{3} : y \ldots . (4)$. Из (3) и (4) имамо да је $\frac{h}{3} : y = (a+b) : b$, одакле је $y = \frac{bh}{3(a+b)}$. Но пошто је: $x = ST = SR + RT = \frac{h}{3} + y$, то после замене вредности за y коначно добијамо: $x = \frac{h}{3} \cdot \frac{a+2b}{a+b}$. На исти начин налазимо удаљеност тежишта T од мање паралелне стране: $z = \frac{h}{3} \cdot \frac{2a+b}{a+b}$.

Ако је $a = b$, трапез постаје паралелограм и у том случају постаје $x = \frac{h}{2}$, тежиште је подједнако удаљено од обе паралелне стране. За $b = 0$ трапез се претвара у троугао, а израз за x постаје $x = \frac{h}{3}$, што изражава познату чињеницу да је тежиште троугла удаљено од основице за трећину висине.

Izračunavanje veličine meteora

VLADIS VUJNOVIĆ, Zagreb

Uvriježilo se mišljenje, da su meteori dosta veliko kamenje veličine šake, jer takvi znadu pasti na površinu Zemlje. No, to je posve krivo. Velika većina meteora — doletjevši iz međuplanetarnog prostora— uopće ne stigne do tla, već se zbog trenja u atmosferi ispari, izgori i nestane. Prosječan meteor opaža se na visini od 70—120 km. Svi ostali su izuzeci, a kamenje i stijenje, što kojiput znade pasti na tlo, samo su velika rijetkost.

Pokušat ćemo si stvoriti sliku o veličini meteora na temelju poznatih fizikalnih činjenica. Za to je potrebno nešto znati o atmosferi i o meteoru kao krutom tijelu. Za dobivanje grube predodžbe dovoljno je izračunati red veličine — odrediti, da li je na pr. masa meteora 1 kg, 1 g, 0,1 g i t. d.

Šta uopće predstavlja atmosfera za meteor, koji velikom brzinom juri kroz nju? Brzine meteora su poznate. Najveće se kreću oko 70 km s^{-1}, no mi ostanimo kod

neke srednje vrijednosti od 50 km s^{-1}. Ova golema brzina je za meteor katastrofalna, jer se brzi meteor snažno sudara s česticama zraka. Energije sudara su vrlo velike i u uvjetima visoke i rijetke atmosfere rezultiraju osebujnim posljedicama. Brod, koji se probija kroz vodu, odgrće čestice u stranu — isto to čini i tijelo, koje se razmjerno sporo giba kroz zrak. Ispred tijela se stvara »kapa« od vode ili zraka, a iza tijela nastaju virovi. Svega toga kod meteora nema. Svaka čestica zraka udara u meteor kao tane i otkida mu površinske atome: meteor se »isparava«, smanjuje, dok ga sasvim ne nestane.

Kod brzine od 50 km s^{-1} jedan gram mase ima energiju od 1,25 miliona džula. Nas zanima, koliku će energiju u odnosu na meteor imati jedna molekula zraka. Dušik i kisik su pretežni sastojci (79%, 21%) atmosfere kako niske, tako i visoke — gdje se pojavljuju meteori — pa možemo smatrati, da će se samo njihove molekule susretati s meteorom. Dušik N_2 ima molekularnu masu 28, kisik 0_2 ima 32. U računu uzmimo sredinu: 30. Kinetička energija jedne molekule zraka prema meteoru je tada

$$E = \frac{m \cdot v^2}{2} = \frac{30 \cdot m_{\text{proton}} \cdot v^2}{2},$$

uz

$$m_p = 1{,}67 \cdot 10^{-24}\, g$$

$$v = 50\ \text{km}\ s^{-1} = 5 \cdot 10^6\ \text{cm}\ s^{-1} \quad \text{izlazi}$$

$$E = 6{,}310^{-10}\ \text{erga} \doteq 400\ \text{eV}; \qquad (1\ \text{erg} = 6{,}24 \cdot 10^{11}\ \text{eV}).$$

Energija se troši na to, da se otrgnu atomi meteora. Atomi su vezani u molekulama. Da bi se atom otrgnuo iz molekule, da bi se molekula raspala, potrebno je izvršiti radnju — to je energija disocijacije i ovisi o molekuli. No za razne molekule energija disocijacije se dosta malo razlikuje i kreće se oko vrijednosti od 4—5 eV. Jedna molekula zraka, kako smo vidjeli, prenaša na meteor energiju od 400 eV — to znači, da je ona u stanju otrgnuti od meteora 400/4=100 atoma. Pri tom će, naravno, u velikom broju slučajeva doći do rastavljanja molekule zraka, do ionizacije i do pobuđivanja na svjetlost. Zato mi meteor i vidimo.

Jedna molekula zraka ima molekularnu masu (30) usporedljivu s atomima prosječnog meteora, jer se meteori većinom sastoje od lakših elemenata — kao što je kisik (atomna masa 16), silicij (28), magnezij (24), — a u manjem broju od željeza (56) i nikla (59). Zato će — jer jedna molekula zraka otrgne 100 atoma meteora — jedan gram zraka otrgnuti 100 grama od meteora, t. j. bilo koja masa zraka uništit će meteor, koji ima 100 put veću masu! Opet, to je pravilo vrlo grubo, zbog svih netočnosti u dosadašnjem računu, no ono vrijedi kod većine meteora i daje nam uvid u prilike, u kojima se nađe meteor kad uđe u atmosferu Zemlje.

Ako sada saznamo masu zraka, koju meteor susretne prije nego što izgori, moći ćemo odrediti i njegovu masu!

Zadržimo se na visini od 100 km. Tu se većina meteora pojavljuje i izgara. Moramo izračunati, kolika je masa zraka, koji se nalazi u stupcu s bazom od 1 cm^2 iznad te visine sve do granica atmosfere. Prvo izračunajmo, koliki se broj molekula nalazi u tom stupcu. Poslužiti ćemo se podacima, dobivenim blizu površine Zemlje.

Pritisak i gustoća stalno opadaju s visinom ali tako, da se svakih 5 km prepolavljaju. Ako je broj molekula u 1 cm^3 na površini Zemlje kod normalnih uvjeta (pritisak od 760 mm Hg, temperatura od 0° C) $n_0 = 2{,}69 \cdot 10^{19}$ (Loschmitov broj), tada će na visini od 5 km biti u 1 cm^3 dvaput manje t. j. $n_0/2$, na visini od 10 km ... $n_0/4$, na 15 km ... $n_0/2^3$, na 20 km ... $n_0/2^4$ i t. d., nastavljajući taj postupak do visine od 100 km dobit ćemo, da je tamo broj molekula u 1 cm^3 zraka

$$n = \frac{n_0}{2^{\frac{100}{5}}} = \frac{n_0}{2^{20}} = \frac{n_0}{1048576} \quad \text{što je približno jednako} \quad \frac{n_0}{1{,}05 \cdot 10^6}$$

odnosno:

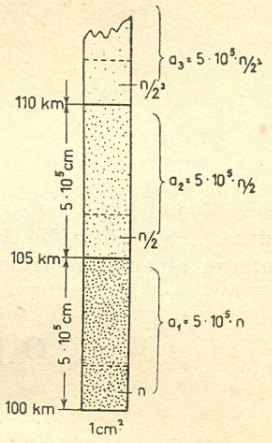
$$n = \frac{2{,}69 \cdot 10^{19}}{1{,}05 \cdot 10^{6}} = 2{,}56 \cdot 10^{13},$$

dakle u 1 cm³ zraka na visini 100 km iznad površine Zemlje ima $2{,}56 \cdot 10^{13}$ molekula.

Nas ne zanimaju molekule ispod 100 km. Koliko će molekula biti u 1 cm³ na visini od 105 km, 110 km i t. d. možemo saznati istim postupkom, ali treba saznati ukupan broj molekula, a ne broj u kubičnim centimetrima, međusobno udaljenim po 5 km.

U tu svrhu razdijelimo stupac zraka iznad 100 km u prizme dužine 5 km (vidi sl. 1) i pretpostavimo, da je unutar jedne prizme broj molekula u 1 cm³, t. j. gustoća zraka stalna: u prvoj prizmi kao i na visini od 100 km, u drugoj prizmi kao i na visini od 105 km i t. d.

Tada u prvoj prizmi imamo $5 \cdot 10^5 \cdot n$ molekula,
u drugoj prizmi $5 \cdot 10^5 \cdot n/2$ molekula,
u trećoj prizmi $5 \cdot 10^5 \cdot n/2^2$ molekula i t. d.



Sl. 1.

Imat ćemo beskonačni i konvergentni geometrijski red s prvim članom $a_1 = 5 \cdot 10^5 \cdot n$ i s faktorom $q = 1/2$. Sada možemo izračunati sumu reda S:

$$S = \frac{a_1}{1 - q} = 2{,}56 \cdot 10^{19}.$$

Toliko ima molekula u stupcu zraka presjeka 1 cm² od visine 100 km sve do granice atmosfere, gdje skoro molekula i nema, jer im stalno dijeljenje s 2 vrlo brzo smanji broj.

Masu tog zraka u gramima naći ćemo množenjem broja molekula s njihovom molekularnom masom i masom protona u gramima:

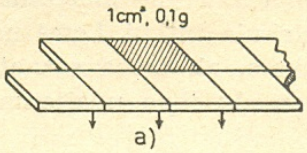
$m = 2{,}56 \cdot 10^{19} \cdot 30 \cdot 1{,}67 \cdot 10^{-24} = 0{,}00128$ grama. Taj je broj malo prevelik, jer smo gustoću zraka precijenili: uzeli smo, da još i 5 km iznad 100 km postoji ista gustoća, a ona zapravo opada stalno, neprekidno. Račun bi bio točniji, da smatramo gustoću u polovini prizme ili u kojem manjem dijelu stalnom, pa da istim putem proračunamo ukupnu količinu molekula. Najtočnije bi bilo da radimo sa stalno promjenljivom gustoćom. Sada nam je dovoljno znati da smo broj precijenili, pa možemo uzeti masu od 0,001 g kao posve prihvatljiv rezultat.

Tako bi meteor, koji ima frontalnu površinu, t. j. površinu s kojom napreduje, od 1 cm² (jer smo razmatrali stupac zraka s tim presjekom) susreo na svom putu sve do nestanka, izgaranja, količinu zraka od jednog miligrama, pa bi imao masu od 0,1 grama, jer određena masa zraka razori 100 put veću masu meteora. No, svi meteori nemaju upravo toliku površinu, pa se moramo izraziti preciznije i reći, da meteor mora imati 0,1 grama mase po svakom kvadratnom centimetru frontalne površine, odnosno

$10 \cdot m = P$, ako je masa m izražena u g a površina P u cm².

Iz ovoga pravila može se izvesti veličina meteora, jer masa ovisi o veličini (kod neke gustoće), a i frontalna površina ovisi o veličini. Ovdje je važno, kakvog je oblika meteor. Nevjerojatno bi bilo, da postoji meteor kao na slici 2a). Takav meteor bi mogao imati bilo koju veličinu, jer je stalno postignut uvjet, da se masa od 0,1 g nalazi na površini od 1 cm². No zbog toga, što je meteor kompaktne, zaobljene forme, prikazat ćemo ga kockom. Mogli bi ga prikazati i kuglom, ali kocka

više odgovara, jer je meteor nepravnili odlomak kamena. Ta se kocka ne će stalno kretati u smjeru jedne stranice, već će se okretati oko osi, pa će mu udarna površina ustvari biti presjek po dijagonali. To je naš P:



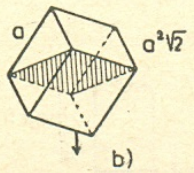
$$P = a^2\sqrt{2}, \tag{1}$$

$$m = \varrho V = \varrho a^3. \tag{2}$$

Uzmimo $\varrho = 5$ g/cm³, jer je meteor kameni ili željezni i uvrstimo sve to u osnovno pravilo:

$$10 \cdot 5 \cdot a^3 = a^2\sqrt{2}, \tag{3}$$

$$a = \frac{\sqrt{2}}{50} = 0{,}028 \text{ cm} = 0{,}2 \text{ do } 0{,}3 \text{ mm} \tag{4}$$



Sl. 2.

Masa neposredno izlazi iz (2):

$$m = 0{,}00011 \text{ g} = 0{,}1 \text{ mg}. \tag{6}$$

Kao konačni rezultat dobivamo, da je prosječni meteor velik par desetina milimetara, a da mu se masa kreće oko jedne desetine miligrama. Kako vidimo, meteor je sasvim malena čestica, gotovo zrnce prašine. Usprkos toga, zbog velike brzine, on nosi znatnu količinu energije.

Za taj proračun — koji se u prvi čas čini nemoguć — nije nam trebalo ništa drugo nego poznavati brzinu meteora, visinu na kojoj izgara, radnju, da mu se otrgnu atomi iz molekula i opadanje gustoće zraka s visinom.

O jednom Diofantovom zadatku

STJEPAN ŠKARICA. Zagreb

Valja naći četiri od nule različita racionalna broja a, b, c i d tako, da svaki od šest izraza: $ab + 1$, $ac + 1$, $ad + 1$, $bc + 1$, $bd + 1$, $cd + 1$ bude potpun kvadrat.

Diofant stavlja $a = x$, $ab + 1 = (x + 1)^2 = x^2 + 2x + 1$ i odatle dobiva $b = x + 2$; iz $ac + 1 = (2x + 1)^2$ nalazi $c = 4x + 4$, a iz $ad + 1 = (3x + 1)^2$ dobiva $d = 9x + 6$. Ustanovljuje, da je $bc + 1 = (x + 2)(4x + 4) + 1 = (2x + 3)^2$, $cd + 1 = (4x + 4)(9x + 6) + 1 = (6x + 5)^2$, dok je peti izraz $bd + 1 = 9x^2 + 24x + 13 = (3x + 4)^2 - 3$ pa ne može biti kvadrat za nijedno cjelobrojno x (osim za $x = -2$, ali je onda $b = 0$). Stoga *Diofant*, ne poznavajući brojeva s predznakom, traži rješenje u (pozitivnim) razlomcima i nalazi $x = \frac{1}{16}$. Tražena su četiri broja: $\frac{1}{16}$, $\frac{33}{16}$, $\frac{68}{16}$, $\frac{105}{16}$, a onih šest izraza redom su kvadrati: $\left(\frac{17}{16}\right)^2$, $\left(\frac{18}{16}\right)^2$, $\left(\frac{19}{16}\right)^2$, $\left(\frac{50}{16}\right)^2$, $\left(\frac{61}{16}\right)^2$, $\left(\frac{86}{16}\right)^2$.

Stavimo li $9x^2 + 24x + 13 = (3x - m)^2$, nalazimo $x = \frac{m^2 - 13}{6(4 + m)}$; za $m = 4$ je $x = \frac{1}{16}$; za svako racionalno m dobivamo novu četvorku; na pr. za $m = 5$ je $x = \frac{2}{9}$, a pripadna četvorka: $\frac{2}{9}$, $\frac{20}{9}$, $\frac{44}{9}$, 8; za $m = 2$ je $x = -\frac{1}{4}$, a četvorka: $-\frac{1}{4}$, $\frac{7}{4}$, 3, $\frac{15}{4}$. Ako je $a = x$, $b = 4x + 4$, $c = 9x + 6$, $d = 16x + 8$, načinom kao gore nalazimo $x = \frac{m^2 - 33}{16(6 + m)}$; za $m = 3$ izlazi $x = -\frac{1}{6}$, za $m = 7$ je $x = \frac{1}{13}$, za $m = 9$ je $x = \frac{1}{5}$, i t. d.

Općeno: Ako je $a = x$, pa su $ab + 1$ i $ac + 1$ potpuni kvadrati, onda mora biti $b = k^2x + 2k$, $c = m^2x + 2m$. Potpun kvadrat valja da bude i $bc + 1$, t.j. $(k^2x + 2k)(m^2x + 2m) + 1 = k^2m^2x^2 + 2km(k+m)x + (4km+1) = (kmx + p)^2$; odatle izlazi $p = k + m$, $d^2 = (k+m)^2 = 4km + 1$, t.j. $(m - k)^2 = 1$, a odatle $m = k + 1$. Tako dobivamo prva tri broja četvorke: $a = x$, $b = k^2x + 2k$, $c = (k+1)^2x + 2(k+1)$. Ako prema Diofantu uzmemo za četvrti broj $d = (k+2)^2x + 2(k+2)$, zadatak je riješen, ako odredimo x i k tako, da bude $bd + 1 = [k(k+2)x + 2(k+1)]^2 - 3$ potpun kvadrat, na pr. $[k(k+2)x + p]^2$. Uzmemo li na pr. $p = -(2k + 2)$, nalazimo, da je prvi broj $x = \frac{3}{8k(k+1)(k+2)}$; kako je nazivnik za svako cjelobrojno k djeliv s 3, izlazi za $k = 1, 2, 3, 4, 5, \ldots$ prvi broj $a = x = \frac{1}{16}, \frac{1}{64}, \frac{1}{160}, \frac{1}{320}, \frac{1}{560}, \ldots$, a za $k = \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \frac{7}{2}, \ldots$ izlazi $a = x = \frac{1}{5}, \frac{1}{35}, \frac{1}{105}, \frac{1}{231}$, i t. d. Mijenjajući p i k dobivamo ∞^2 rješenja postavljenog zadatka.

Postavljeni zadatak spada u neodređenu analizu, pa mu kao takovom valja naći rješenje u cijelim brojevima, a u ovom slučaju čak u prirodnim brojevima, jer nijedan od brojeva a, b, c i d ne može biti jednak nuli, a sva četiri moraju biti ili pozitivni ili negativni brojevi, pa se negativna četvorka dobiva iz pozitivne promjenom predznaka; na pr. iz četvorke 1, 3, 8, 120 četvorka -1, -3, -8, -120. Kako u gornjim izrazima za a, b, c, i d broj x ne može biti jednak nuli, a k mora biti različito od 0, -1, -2, očito je da izraz $bd + 1 = [k(k+2)x + 2(k+1)]^2 - 3$ ne može biti kvadrat prirodnog broja jer neodređena jednadžba $y^2 - 3 = z^2$ ima u cijelim brojevima jedino rješenje $y = \pm 2$, $z = \pm 1$. Diofantovom metodom ne možemo dakle doći do rješenja zadataka u prirodnim brojevima.

Ako je $a = x$, izraz $ad + 1$ ne može dakle biti kvadrat linearnog izraza u x, pa stavimo $dx + 1 = (px^2 + qx + 1)^2$! Odatle je $d = p^2x^3 + 2pqx^2 + (p^2 + 2q)x + 2q$. Sad valja odrediti p i q tako, da budu izrazi $bd + 1$ i $cd + 1$ potpuni kvadrati. Iz $bd + 1 = [p^2x^3 + 2pqx^2 + (p^2 + 2q)x + 2q](k^2x + 2k) + 1 = (rx^2 + sx + t)^2$ izjednačivanjem koeficijenata na lijevoj i desnoj strani dobixamo $p = 2k(k+1)$, $q = 2(2k+1)$, $r = 2k^2(k+1)$, $s = 2k(3k+2)$, $t = 4k + 1$. Prema tome je $d = 4[k^2(k+1)^2x^3 + 2k(k+1)(2k+1)x^2 + (5k^2 + 5k + 1)x + (2k+1)]$. Kako je $2k + 1 = k + (k+1$, $5k^2 + 5k + 1 = 5k(k+1) + 1$, izraz za d je simetričan s obzirom na k i $k + 1$, i stoga je i $cd + 1$ potpun kvadrat. Prema tome je rješenje Diofantova zadatka u prirodnim brojevima: $a = x$; $b = k^2x + 2k$, $c = (k+1)^2x + 2(k+1)$, $d = 4[k^2(k+1)^2x^3 + 2k(k+1)(2k+1)x^2 + (5k^2 + 5k + 1)x + (2k+1)]$. Na posve jednak način za $a = x$, $b = k^2x - 2k$, $c = (k+1)^2x - 2(k+1)$ dobili bi $d = 4[k^2(k+1)^2x^3 - 2k(k+1)(2k+1)x^2 + (5k^2 + 5k + 1)x - (2k+1)]$.

Prvom i drugom rješenju možemo dati zajednički oblik, koji je jednostavniji i za račun pogodniji. Supstitucijom lako nalazimo, da se prvi izraz za d poništava za $x = -\frac{1}{k}$ i za $x = -\frac{1}{k+1}$, a drugi za $x = \frac{1}{k}$ i $x = \frac{1}{k+1}$, t.j. prvi je djeljiv s $(kx + 1)$ i $(kx + 1 + x)$, a drugi s $(kx - 1)$ i $(kx - 1 + x)$. Označimo li $kx \pm 1$ sa l, onda $kx \pm 1 + x = l + a$, a $d = 4l(l + a)(l + b)$; osim toga je $l^2 = ab + 1$, $c = a + b + 2l$.

Ako su dakle a, b i l prirodni brojevi, i $l^2 = ab + 1$, onda je rješenje Diofantova zadatka u prirodnim brojevima: a, b, $c = a + b + 2l$, $d = 4l(l + a)(l + b)$. To rješenje je našao *Euler*.

Na pr. $a = 1$, $b = 3$, $l = 2$, $c = 8$, $d = 120$;
$a = 1$, $b = 8$, $l = 3$, $c = 15$, $d = 528$;
$a = 2$, $b = 4$, $l = 3$, $c = 12$, $d = 420$, i t. d.

Pripadni kvadrati su za prvu četvorku: 2^2, 3^2, 11^2, 5^2, 19^2, 31^2; za drugu: 3^2, 4^2, 23^2, 11^2, 65^2, 89^2.

Daju li Eulerove formule sva moguća rješenja zadatka u prirodnim brojevima? U racionalnim ne daju, jer na pr. Diofantovo rješenje: $\frac{1}{16}, \frac{33}{16}, \frac{68}{16}, \frac{105}{16}$ razlikuje se u četvrtom članu od Eulerova: $\frac{1}{16}, \frac{33}{16}, \frac{68}{16}, \frac{3825}{256}$.

Fizikalne osebine i klasifikacija oblaka

IVO PENZAR, Zagreb

U današnjim srednjoškolskim udžbenicima fizike[1] obrađeni su mnogobrojni pojmovi iz fizike atmosfere. Među ostalim dan je lijep prikaz postanka i podjele oblaka i nastajanja oborine. No kako svaki od nas baš na te atmosferske pojave najjače obraća svoju pažnju, pokušat ćemo se ovdje nešto opširnije pozabaviti tim pitanjem.

Iz vlastitog iskustva u svakodnevnom životu mi već znamo dosta toga o oblacima. Sigurno smo ih nebrojeno puta sa zanimanjem promatrali i divili se njihovim oblicima. Kod toga smo vjerojatno pomislili, da postoji nepregledno mnoštvo tih oblika. Zanimljivo je, da je takovo mišljenje vladalo i u naučnim krugovima sve do početka XIX. stoljeća. Tek u tom stoljeću francuski prirodoslovac *Lamarck* pokušao je nekako srediti to šarenilo među oblacima. Njegov je pokušaj s mnogo više uspjeha nastavio engleski meteorolog *Luke Howard* nekoliko godina kasnije. On je oblake podijelio u neke osnovne tipove i nazvao ih latinskim imenima, koja se još i danas upotrebljavaju. Njegova klasifikacija sasvim dobro karakterizira oblake, kako morfološki t. j. po obliku, tako i genetički, što znači po postanku. Mnogobrojni kasniji istraživači atmosfere sve su više obraćali pažnju na sastav oblaka, visinu, u kojoj se javljaju i uvjete, pod kojima nastaju. Tako je postepeno izgrađena današnja međunarodna klasifikacija oblaka. Ona dijeli oblake po obliku i visini, u kojoj se nalaze, na 10 rodova. Njihova su imena slijedeća:

1. Cirrus
2. Cirrocumulus
3. Cirrostratus
4. Altocumulus
5. Altostratus
6. Nimbostratus
7. Stratocumulus
8. Stratus
9. Cumulus
10. Cumulonimbus

Rodovi se dalje raspadaju na vrste, odlike i osebine. U našem daljnjem izlaganju zadržat ćemo se uglavnom samo na opisu rodova.

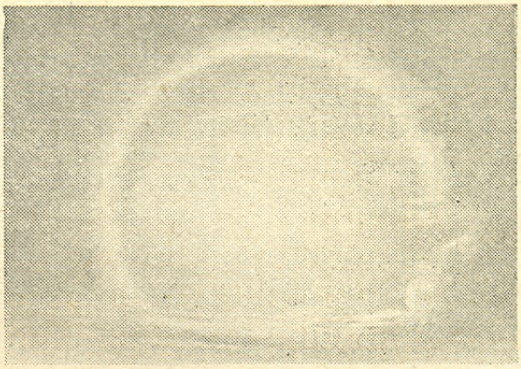
Cirrusi, Cirrocumulusi i *Cirrostratusi* javljaju se na vrlo velikim visinama. To su t. zv. visoki oblaci. U ekvatorijalnim predjelima oni dolaze između 6 i 18 km, u umjerenim širinama između 5 i 13 km, a u polarnim područjima između 3 i 8 km iznad tla. To su oblaci, što se obično javljaju za lijepa vremena: fini, većinom sasvim bijeli, vlaknaste strukture, često svilenastog sjaja i bez vlastite sjene. Jednom imaju oblik pahuljica ili grudica, drugi put su opet slični pramenju kose ili su razgranati kao perje (sl. 1). Znadu biti i u obliku skija ili kandža. Skoro nikad ne prekrivaju cijelo nebo i naoko lebde nepomično na nebeskom modrilu. Kad se nalaze ispred Sunca ili Mjeseca skoro i ne zastiru njihov sjaj. S jutra ili večeri obojeni su žuto ili crvenkasto.

Kako su ovi oblaci u velikim visinama, gdje je zrak vrlo hladan, oni se sastoje isključivo iz sitnih ledenih kristala. Težina tih čestica je tako malena, da ih i vrlo slabe uzlazne struje zraka lako podržavaju u stalnoj visini. Zato iz tih oblaka nikad ne pada oborina. Međutim pojava Cirrusa često puta nagovještava prekid lijepog vremena i najavljuje pogoršanje, koje se može očitovati samo kao pojačana naoblaka, a ponekad i kao kiša ili snijeg.

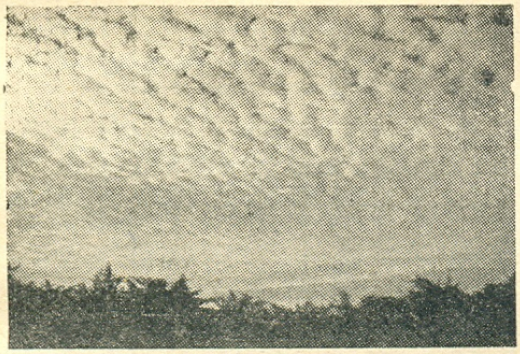
Sigurno je svaki od nas već više puta zapazio na nebu velike bjelkaste ili obojene prstene oko Sunca ili Mjeseca (sl. 2). To je takozvana halo pojava. Ona nastaje samo tada, kad postoji sloj Cirrostratusa, t. j. jednolični bjelkasti oblak, koji daje

[1] Vidi udžbenik Goldberg-Maksić: Fizika za više razrede gimnazije

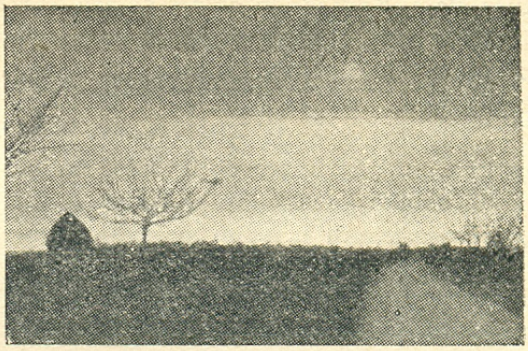
Sl. 1. Cirrus



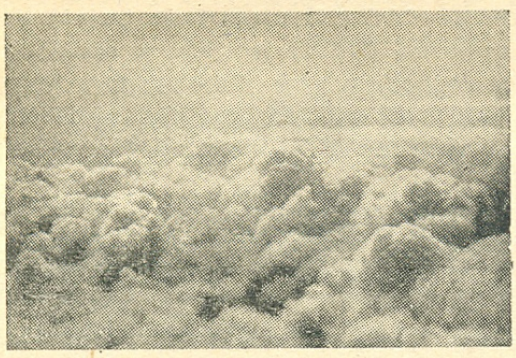
Sl. 2. Cirrostratus s halo pojavom



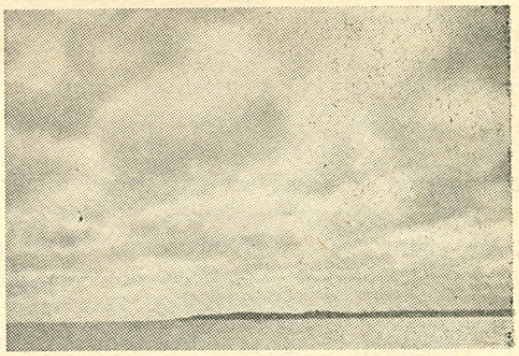
Sl. 3. Altocumulus



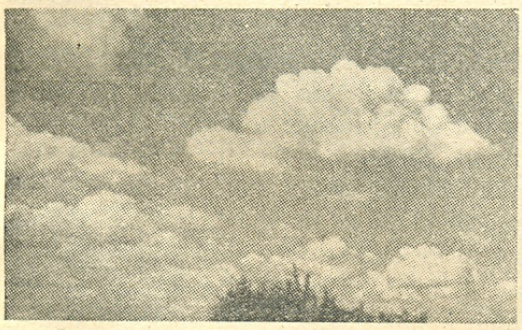
Sl 4. Altostratus



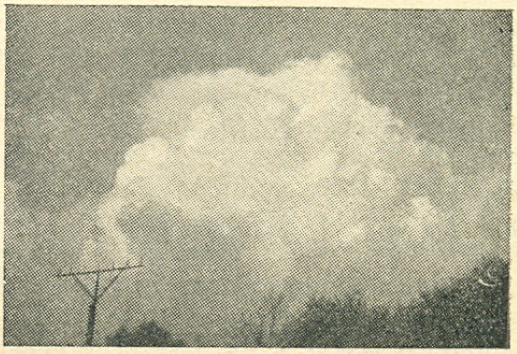
Sl. 5. Pogled na oblačni sloj odozgora



Sl. 6. Stratocumulus



Sl. 7. Cumulusi lijepog vremena



Sl. 8. Cumulonimbus

nebu mliječni izgled. Prstenovi nastaju odbijanjem i lomom zraka svjetlosti na sitnim pločicama leda, iz kojih je takav oblak sastavljen.

Altocumulusi i *Altostratusi* dolaze na srednjim visinama i to između 2 i 7 km kod nas. U ekvatorijalnim predjelima nalaze se koji km više, a u polarnim koji km niže. Pretežno se sastoje iz vodenih kapljica, a mogu biti i iz snježnih pahuljica. Obično ne daju oborine. Ako nekad ipak dođe do toga, to je veoma slaba kiša ili snijeg.

Altocumulus je čest oblak u našim krajevima. To je grudasto-valoviti sloj oblaka, koji se javlja u mnogo varijanata. Tipični Altocumulus ima oblik gruda ili pločica (sl. 3), većinom izrazito osjenjenih i vrlo plastičnih, koje su dosta pravilno poredane u grupe i redove. Ove oblake narod naziva ovčicama. Grude se ili slabo dodiruju, tako da se između njih nazire nebesko plavetnilo, ili su pak stisnute u neprekidan valoviti sloj. No i u takovom se slučaju jasno razabire grudasta struktura sloja. Kad se ovi oblaci nalaze ispred Sunca ili Mjeseca često se puta na njima javljaju mali obojeni krugovi, koji upravo dodiruju rubove tih tijela. Ta je pojava poznata pod imenom korone ili vijenca, a nastaje ogibom i lomom svjetlosti u kapljicama vode, iz kojih su ti oblaci sastavljeni.

Rijetko se kada Altocumulus oblaci javljaju osamljeno. No u takovim slučajevima oni poprimaju oblik leće. Rubovi su im glatki, a krajevi šiljati. Pojava takovih oblaka govori nam o jakom vjetru na visini, a može poslužiti i kao predznak pojačanja vjetra u nižim slojevima atmosfere.

Altostratus je ime za one oblake, koji poput sive, plavkaste ili mrko-žućkaste koprene prekrivaju obično cijelo nebo. Sunce i Mjesec prodiru kroz njih mutnim svijetlom i vidimo ih kao kroz mliječno staklo (sl. 4). Ako se visina takovog sloja oblaka počinje smanjivati kroz par sati može on preći u niski kišni oblak. Inače može danima stajati na nebu, a da se ne trebamo bojati oborine.

Kišni oblak, koji nastaje spuštanjem Altostratusa zove se *Nimbostratus*. On može ponekad spadati u niske, ponekad u srednje oblake. Iz njega pada trajni snijeg ili kiša, ali bez grmljavine i ne u obliku pljuska. U donjem dijelu se sastoji iz vodenih kapi, a u gornjem iz ledenih kristala. Jednolična baza Nimbostratusa često puta je zastrta niskim raskidanim oblacima, koji u obliku krpa brzo prolaze nebom i daju mu onaj karakterističan izgled ružnog vremena. Kiša obično počne padati tek nakon što se stvore ovi ružni oblaci.

Stratocumulus i *Stratus* spadaju u niske oblake, jer se javljaju između tla do 2 km visine. Njihov pokrivač nam često zastire planinske vrhunce, ako smo u dolini, ili pak, ako smo na nekom povišem vrhu, možemo pod sobom promatrati »more« sastavljeno od tih oblaka (sl. 5).

Stratocumulus je najčešći ukras našeg neba. Obično je to niski sloj, koji pokazuje jasnu strukturu. Nekad se pak javlja u obliku pojedinačnih velikih gruda ili ploča svrstanih u pruge i redove, te se u razmacima između pojedinih dijelova vidi nebesko plavetnilo ili barem življa osvjetljenost oblačne mase (sl. 6). On nikad ne daje oborine. Sastavljen je isključivo od vodenih kapljica.

Stratus se javlja najčešće u jesen i u zimi. To je niski magloviti sloj iz kojeg obično ne pada ništa, a nikad jaka oborina. On može jedino dati rosulju t. j. sitne kapljice vode, koje gotovo lebde u zraku i uvijek padaju samo u malim količinama. Kod niskih temperatura znadu ponekad iz njega padati rijetka sitna zrna snijega. Stratus je znak stabilnog vremena. Često je on lokalan oblak. Ako Stratus leži na tlu zovemo ga *magla*. Kako nju svatko poznaje ne ćemo se na njoj dalje zadržavati.

Tako smo eto razmotrili visoke, srednje i niske oblake. No, nigdje među njima nismo spomenuli *Cumuluse* i *Cumulonimbuse*. Zapitat će netko: pa zar se ovi ne javljaju u jednoj od tih visina? Možemo odmah odgovoriti: Oni ne dolaze u jednoj

određenoj visini. Njihova je baza u visini niskih oblaka, a zbog vertikalnog razvijanja vrh može doprijeti do srednjih, pa čak i do visokih oblaka.

Cumulusi su pojedinačni grudasti oblaci, što se za lijepa vremena u toplom dijelu godine stvaraju na nebu (sl. 7). Njihov razvoj započinje nešto prije podne, i teče koji puta tako brzo, da možemo lijepo pratiti, kako oblak buja u visinu i pri tom poprima vrlo različite oblike. Pred večer se Cumulusi raspadaju i tada osvijetljeni Suncem na zalazu pružaju naročito lijepu sliku. Iz Cumulusa ne pada kiša u našim krajevima. Ovi su oblaci sastavljeni iz vodenih kapljica.

Kad je atmosfera jako nestabilna iz Cumulusa se obično razvije *Cumulonimbus*. To je onaj impozantni oblak, što se u proljeće i u ljeto pojavljuje u popodnevnim satima, ima izgled visokih kula ili planina (sl. 8), a kasnije dobije razvučeni vrh sličan lepezi ili nakovnju. Čini se, kao da se oblak puši pri vrhu. U donjem dijelu sastavljen je od vodenih kapljica, a pri vrhu od ledenih kristala. Iz njega padaju veoma jake oborine, kao pljusak kiše, tuče, ili snijega obično uz grmljavinu. Ispod njegove baze znadu se stvoriti niski raskidani oblaci, koji daju nebu ružni izgled olujnog vremena.

U jedan od spomenutih 10 rodova možemo uvrstiti svaki oblak što se vidi na nebu. No, kako se oblaci nalaze u stalnom razvoju, može jedan te isti oblačni sloj prijeći iz jednog roda u drugi rod. Najčešće se događa da se oblačni sloj spušta ili diže. U takovom slučaju imat ćemo prijelaze od Cirrusa preko Altocumulusa na Stratocumuluse i obratno ili pak od Cirrostratusa preko Altostratusa na Nimbostratus i obratno. Iz nijednog od navedenih rodova ne može nastati Cumulus ili Cumulonimbus, dok od njih može nastati skoro svaki rod oblaka. Tako se za Cumulonimbus s pravom može reći, da je to tvornica oblaka.

Prof. dr. Dušan Pejnović

U noći između 18. i 19. veljače 1958. g. umro je, za svojim radnim stolom prof. dr. Dušan Pejnović, umirovljeni redovni profesor fizike na Prirodoslovno-matematičkom fakultetu u Zagrebu.

Rodio se 4. veljače 1883. godine u Sisku. U Zagrebu pohađao je srednju školu i fakultet. Od 1907. god., pa sve do svoje smrti radio je na fakultetu bilo kao asistent, docent, odnosno profesor. Generacije profesora fizike u Hrvatskoj bile su njegovi đaci. Naučno je radio osobito na ultrazvuku, a mnogo se bavio problemima sa područja elektromagnetskih valova i optike. Uz njegov naučni i nastavni rad veoma mnogo je radio na popularizaciji fizike. Pisao je mnogobrojne popularne članke iz fizike, koji su se odlikovali jasnoćom i preciznošću, a držao je i mnoga javna predavanja s originalnim eksperimentima. I Matematičko-fizički list gubi u prof. dr. Dušanu Pejnoviću svog vrijednog suradnika.

Prof. dr. D. Pejnović imao je osobito dobru memoriju. Pamtio je sve svoje đake i uvijek se interesirao za njihov daljnji napredak u životu. Kolosalno je po-

znavao fizičku literaturu — vrlo mnogo je čitao. Imao je veoma razvijen kritički duh, no svoje kritičke primjedbe davao je u dobronamjernoj, prijateljskoj i nenametljivoj formi.

U prof. dr. D. Pejnoviću gubimo i dobrog, plemenitog i skromnog čovjeka. Svojim velikim znanjem bio je uvijek spreman da pomogne svakome. Narušenog zdravlja, bez porodice, našao je ipak radosti života u naučnom radu. Vrlo je volio svoje sinovce, i teško ga je pogodila njihova smrt u logoru Jasenovcu 1942. godine.

Trajna će ostati uspomena na njega u redovima fizičara, a i ostalog velikog kruga njegovih znanaca i prijatelja. Svi smo ga volili i poštivali.

Slava mu!

Dr. Branimir Marković

IZ MOJE RADIONICE I LABORATORIJA

Određivanje mehaničkog ekvivalenta topline

Kad u školi učimo o pretvaranju mehaničke energije u toplinsku, rijetko to popratimo kvantitativnim pokusom. U školi je teško ostvariti uređaje koji su historijski važni, a koje nalazimo u gotovo svakom udžbeniku, kao što je na pr. Joulov pokus pomoću vretena s lopaticama, koje se okreće u tekućini.

Ovdje je opisan uređaj, koji je jednostavan, pa ga možemo lako sami napraviti i prirediti. On ne će dati rezultate s velikom točnošću, ali je koristan, jer daje uvid u postupak kako eksperimentalno pretvaramo mehaničku energiju u toplinsku, a da pri tome jednu i drugu mjerimo i međusobno povezujemo. Tako ćemo lakše razumjeti postupke kod osjetljivijih uređaja, koji nam u školi nisu dostupni, a o njima učimo.

Čitav pribor ovog uređaja sastoji se od ovih dijelova: kartonska cijev duljine oko 1 metra i otvora 5—7 cm, oko 2 kg olovne sačme, 3 plutena čepa, 1 tanki termometar sa živom, milimetarsko mjerilo na štapu duljine 1 metar.

Kartonsku cijev možemo sami napraviti. Uzmemo veliki arak tankog kartona i namatamo ga oko jednog drvenog štapa debljine 5—7 cm toliko puta, da stijena nastale kartonske cijevi bude debela oko 4 mm. Pri tome treba jedan sloj kartona lijepiti na drugi tako, da konačno imademo čvrstu kartonsku cijev. Sad treba odabrati tri jednaka plutena čepa takve debljine, da dobro zatvaraju otvore cijevi (sl 1a). Jedan od čepova treba probušiti, da kroz njega možemo provući termometar (sl. 1c).

Zamisao pokusa s ovom cijevi je relativno jednostavna. Olovnu sačmu zatvorimo u cijev koju okrećemo nekoliko puta, da sačma pada vertikalno niz cijev od jednog čepa do drugoga. Pri padu ona dobiva kinetičku energiju, koja je jednaka njezinoj potencijalnoj energiji pri vrhu cijevi prije pada. Kad se sačma na donjem kraju cijevi zaustavi, njezina kinetička energija pretvori se u toplinsku. To možemo sada matematički izraziti. Kinetička energija na koncu svakog pada jest lmg erga, gdje je l u cm put kojim masa m grama sačme pada. Nakon n okreta, t. j. padanja, sačma je dobila kinetičku energiju

$$E = n \cdot mg \cdot l \text{ erga},$$

gdje je g akceleracija sile teže. Ta energija pretvorila se u toplinsku, koju možemo izraziti s

$$Q = mc\,(t_2 - t_1) \text{ cal},$$

gdje je c specifična toplina olovne sačme a t_1 i t_2 početna odnosno konačna tempe-

ratura sačme, dakle temperatura prije i poslije padanja. Ako s J označimo broj, koji nam kazuje koliko erga dobivamo od svake gramkalorije, onda možemo pisati

$$n \cdot mg \cdot l \text{ erg} = J \text{ erg/cal} \cdot mc\,(t_2 - t_1) \text{ cal}.$$

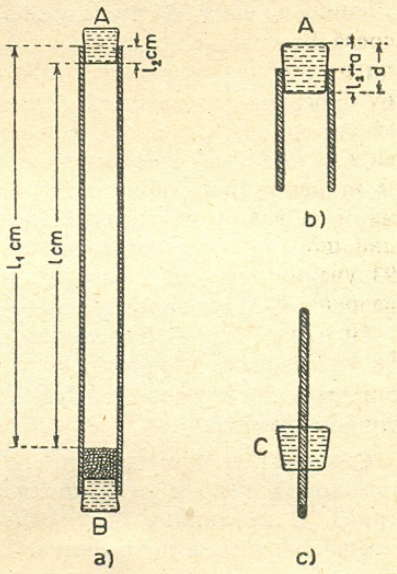
Odavle je

$$J = \frac{n\,l\,g}{c\,(t_2 - t_1)} \frac{\text{erg}}{\text{cal}}$$

Da dobijemo dakle J treba izmjeriti l, t_1 i t_2. Za g ćemo uzeti 981 cm/s², a za c da je 0,032 cal/g st.

Tok rada:

Začepimo cijev čepom B (sl. 1a) i stavimo unutra sačmu. Gornji otvor cijevi začepimo čepom C s termometrom. Lagano okrećemo cijev tako, da sačma dođe do čepa C, te posudica termometra uroni u sačmu. Ostavimo tako cijev 1—2 minute i pročitamo temperaturu t_1. Zatim lagano okrenemo cijev da sačma opet dođe do čepa B. Izvadimo čep C i stavimo obični čep A. Sad naglo okrećemo cijev oko 100 puta tako, da sačma pada od čepa B do A i obrnuto, nastojeći pri tome da kuglice ne klize niz stijene cijevi. Najbolje je pri okretanju cijev tako držati, da dlanovima ruku pritiščemo čepove da se ne bi cijev otvorila i sačma prosula. Nakon okretanja držimo cijev opet vertikalno, izvadimo gornji čep i namjesto njega stavimo opet čep C. Opet polako naginjemo cijev tako, da termometar uroni u sačmu. Sačekamo da termometar poprimi temperaturu sačme, te pročitamo tu temperaturu t_2. Sada još moramo odrediti put što ga pređe sačma kad pada od gornjeg do donjeg čepa. Možemo zamisliti da sačma pada kao jedno tijelo sastavljeno od mnogo kuglica. Tako su putovi svih kuglica kod padanja jednaki i iznose l cm (sl. 1a). To ćemo izmjeriti tako, da cijev sa sačmom opet postavimo vertikalno, dolje sa čepom B a gore otvorenu. Uguramo u cijev milimetarsko mjerilo i izmjerimo dužinu l_1. Sada je $l = l_1 - l_2$, a l_2 izračunamo tako, da izmjerimo d i a, jer je $l_2 = d - a$ (sl. 1b).



Sl. 1.

Ako sada sve te vrijednosti uvrstimo u izraz za J, dobit ćemo mehanički ekvivalent topline izražen u erg/cal. Fina mjerenja daju $J = 4{,}188 \cdot 10^7$ erg/cal ili što je isto 427 kpm/kcal. Brižljivim radom, brzim mijenjanjem čepova i spretnim okretanjem cijevi možemo dobiti rezultate i ispod 8% pogreške prema navedenom točnom rezultatu, iako je uređaj jednostavan i nesavršen. *Elza Vernić*, Zagreb

NAPOMENA:

Uz članke *Iz moje radionice i laboratorija* u br. 3. od ov. god. treba da još spomenemo ovo: Aparat, pomoću kojeg su vršeni eksperimenti iznijeti u tim člancima sastavio je pred nekoliko godina prof. A. Kurelec. Taj aparat je prof. Kurelec demonstrirao na seminarima za srednjoškolske profesore fizike u Zagrebu 1956. g. O tom aparatu pisao je prof. Kurelec u knjizi Mehanika za nastavnike, a u štampi je i članak o tome od prof. Kurelca u Nastavi matematike i fizike, a bit će opisan i u knjizi, koja uskoro izlazi iz štampe, od istog autora pod naslovom Pokusi iz elementarne dinamike. Drago nam je da su profesori taj aparat odmah primijenili u nastavi i sa svojim đacima ga izgradili i vršili na njemu mjerenja iz tog interesantnog dijela mehanike.

ZANIMLJIVOSTI I RAZNO

Takmičenje učenika beogradskih gimnazija u matematici

Beogradska podružnica Društva matematičara i fizičara NRS organizovala je ove godine, prvi put, takmičenje u matematici beogradskih gimnazijalaca. Kvalifikacioni deo takmičenja održan je istovremeno po svim gimnazijama 6 aprila ove god. Na njemu je ukupno učestvovalo 883 učenika iz svih 15 gimnazija na teritoriji sreza Beograd. Oni su u toku 2,5 sata imali da pismeno rešavaju 5 zadataka u okviru programa svog razreda. (Te zadatke, iste za sve škole, spremila je naročita komisija u tom cilju obrazovana). Ocenjivanje je vršeno strogo objektivno, prema poenima, i na osnovu postignutih rezultata kvalifikovalo se za finalni deo takmičenja 93 učenika iz svih razreda (i to: iz V razreda — 31 učenik, iz VI — 22, iz VII — 10 i iz VIII — 30 učenika). Od njih je 88 učestvovalo u finalnom delu, koje je održano 20 aprila na Prirodno-matematičkom fakultetu.

Oba dela takmičenja protekla su u besprekornom redu i uz puno zalaganje učesnika, i 27 aprila obavljena je svečana predaja nagrada i pohvalnica. Prve nagrade i naslov prvaka Beograda za školsku 1957/58 g. i za odgovarajući razred dobili su: Ilić Slobodan, uč. VIII razreda III beograd. gimn.; Atanasovski Petar, uč. VII raz. II b. g.; Mojsilović Petar, uč. VI raz. III b. g.; Marić Nebojša, uč. V raz. II b. g.

Druge nagrade dobili su: Živković Miliveje, uč. VIII raz. XIII b. g.; Vuković Miouub, uč. VIII raz. I b. g.; Ivković Petar, uč. VIII raz. III b. g.; Hruška Milan, uč. VII raz. V b. g.; Popović Zoran, uč. VI raz. XIV b. g. i Hribšek Marija, uč. V raz. XV b. g.

Treće nagrade dobili su: Vujičić Vladimir, uč. VII raz. II zemunske g.; Marinković Slobodan, uč. VI raz. XIV b. g. i Kuzmanović Stevan, uč. V raz. XIV b. g.

Pohvalnice su primili svi oni učesnici finalnog takmičenja, koji nisu nagrađeni, a postigli su na istom preko 50% mogućih poena (t. j. najmanje 13 od 25 mogućih). Takvih je bilo ukupno: u V raz. 5 učenika, u VI — 5 u VII — 4 i u VIII — 12.

U celini uzevši, na finalnom delu takmičenja najbolji uspeh pokazalu su učenici VII i VIII raz., a najslabiji učenici V raz. (Verovatno zato što su zadaci za V raz. bili relativno najtežji).

Zadaci na finalnom delu takmičenja bili su ovi:

VIII razred

1) Dat je niz:

$$2, \frac{a+b}{ab}, \frac{a^2+b^2}{a^2b^2}, \ldots \frac{a^n+b^n}{a^n b^n}, \ldots$$

a) Naći uslov da dati niz pretstavlja geometriskу progresiju.

b) Kad je ta progresija opadajuća?

v) U poslednjem slučaju odrediti zbir te beskonačne progresije.

2) Na jednoj dužи $AB = a$ uzeta je proizvoljna tačka C, nad AC je konstruisan ravnostran trougao ACD, a nad CB kvadrat $CBEF$. Odrediti položaj tačke C tako da površina petougla $ABEFD$ bude najmanja.

3) Date su tačke $A(-a, 0)$ i $B(2a, 0)$. Odrediti geometriskо mesto tačaka $C(x, y)$ tako da u trouglu ABC uvek bude $\sphericalangle ABC$ dva puta veći nego $\sphericalangle BAC$.

4) U polukrugu prečnika $AB = 2r$ povučene su iz tačke A i centra polukruga O paralelne prave, koje sa AB zaklapaju ugao x i seku polukrug u tačkama C i D. Odrediti ugao x tako da površina četvorougla $AODC$ bude dvaput veća od površine trougla BCD.

5) U dvema međusobno normalnim ravnima uočiti dva podudarna ravnokraka trougla ACD i BCD sa zajedničkom osnovicom $CD = 2x$ i krakima dužine a. Neka su M i N sredine dužи AB i CD.

a) Dokazati da je $MN \perp AB$ i $MN \perp CD$,

b) Izraziti u funkciji od a i x dužine AB i MN,

v) Odrediti x tako da diedar čija je ivica AB i čije strane prolaze kroz tačke C i D bude pravougli.

VII razred

1) Neka je M proizvoljna tačka dužи $AB = a$. Nad $AM = x$ konstruisan je pravougaonik $AMCD$ čija je visina dvaput veća od osnovice. Nad dužи BC konstruisan je kvadrat $BEFC$. Odrediti položaj tačke M tako da površina šestougla $ABEFCD$ bude što manja.

2) Odrediti m iz uslova da nejednačina:

$$x^2 - 2(4m-1)x + 15m^2 - 2m - 7 > 0$$

bude zadovoljena za svaku realnu vrednost x.

Добијени резултат проверити на графику дате квадратне функције (која је на левој страни неједначине) за једну од могућих целих вредности m.

3) Дато је $\cos\alpha = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$. Израчунати најпре $\cos 2\alpha$ па одатле одредити угао $\alpha\left(0 < \alpha < \frac{\pi}{2}\right)$. На основу тога наћи

$$\cos\left(6\alpha + \frac{\pi}{4}\right).$$

4) Решити једначину: $\sin^2 2x + \sin^2 x = 1$.

5) У троуглу је $\alpha - \beta = 3\gamma$.

а) Показати да је $\alpha - \gamma = 90^0$,

б) Ако је $\sin\gamma = \frac{3}{5}$ наћи синусе осталих углова,

в) Ако је $\sin\gamma = \frac{3}{5}$, а $P = 42\,m^2$, наћи стране троугла.

VI разред

1) Показати да је $x = \frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{a}{b}} + \sqrt{\frac{b}{a}}\right)$ решење једначине $\frac{2b\sqrt{x^2-1}}{x-\sqrt{x^2-1}} = a - b$.

2) Доказати да је

$$\log a_{(b)} \cdot \log b_{(c)} \cdot \log c_{(a)} = 1$$

где су a, b и c позитивни бројеви различити од 1.

3) Површина правоугаоне слике, заједно са оквиром, износи 900 cm^2, а површина оквира, ширине 2 cm је 244 cm^2. Наћи дужину и ширину саме слике.

4) Дат је правоугли троугао ABC ($AB = AC = a$). У теменима B и C с исте стране равни троугла, подигнуте су на њој нормале BB' и CC' ($BB' = CC' = a$).

а) Доказати да је троугао $AB'C$ равностран.

б) Израчунати површину и запремину пирамиде $ABCC'B$.

в) Показати да су сва темена ове пирамиде подједнако удаљена од пресека S дијагонала четвороугла $BCC'B'$.

5) Површина правилне четворостране зарубљене пирамиде је 708 dm^2, странила веће основе 18 dm, а бочна висина 4 dm. Колика је висина допунске пирамиде?

V разред

1) Број страница два полигона разликује се за 6 а број њихових дијагонала за 153. Колики је број страница сваког од та два полигона?

2) Из суда, у коме има 10 литара воде, истиче у сваком минуту $\frac{1}{2}$ литара. Изразити преосталу количину воде у функцији од броја минута. Конструисати график ове функције и на њему прочитати:

а) Колико је воде преостало после 7 минута.

б) После колико минута остаће у суду четвртина воде.

в) Када ће се суд испразнити.

3) Дата је једначина:

$$\frac{(3lk+1)x}{k} = \frac{3lk}{k+1} + \frac{(2k+1)x}{k^3+2k^2+k} + \frac{k^2}{(k+1)^3}$$

а) Показати да решење ове једначине не зависи од l,

б) Доказати да је решење дате једначине мање од 1 у случају кад је $k > 0$.

4) Дат је правоугли троугао ABC

а) Конструисати два круга, који пролазе кроз теме C правог угла и додирују хипотенузу у темену A односно у B.

б) Доказати да се ови кругови додирују у тачки C.

в) Изразити полупречнике ова два круга помоћу страна троугла.

5) У троуглу је позната страна c висина h_c и угао $\alpha = 60^0$

а) Изразити стране a и b помоћу c и h_c.

б) Израчунати a и b за случај $c = 16$ cm, $h_c = 5\sqrt{3}$ cm.

Б. С.

Srednješolski tečaj za matematiko v Ljubljani

Društvo matematikov in fizikov LRS je priredilo v Ljubljani srednješolski tečaj za matematiko za dijake 6., 7. in 8. razredov gimnazij in strokovnih šol. Odziv s strani dijakov je bil nepričakovano velik, prijavilo se jih je preko 200, zato smo jih morali porazdeliti v pet skupin. Vsaka skupina je imela predavanje enkrat tedensko, kjer so se obravnavale sledeče teme: diofantske enačbe, sintetična delitev, deljivost, pitagorejska števila, ekstremi, neenačbe, pogreške pri meritvah, homotetije in inverzije.

Te teme so se obravnavale na seminarski način, pri vajah pa so pomagali študenti naravoslovne fakultete v Ljubljani. Izdali smo skripta vaj, da bi se

dijaki laže pripravili na zaključno tekmovanje. V tem času so bila še sledeča predavanja: opisna geometrija v tehniki in matematiki (Oton Sajovic), o nekaterih matematičnih problemih (dr. Ivan Vidav), elektronski računski stroji (dr. France Križanič).

30. marca smo imeli zaključno tekmovanje. Porazdelili smo dijake v tri skupine. Vsaka skupina je dobila štiri naloge, dve iz snovi, ki smo jo obravnavali na tečaju, in dve iz srednješolskega programa.

Prva skupina (6. razred) je imela sledeče naloge:

1. Pokaži, da je izraz $n^5 - n$ deljiv z 48, ako je n liho število!
2. Katero celo število, ki je deljivo z 7, da pri delitvah z 2, 3, 4, 5 in 6 po vrsti ostanke 1, 2, 3, 4 in 5? Koliko je pozitivnih rešitev do 10000 in katero je najmanjše tako število?
3. V nekem logaritemskem sestavu je $\log_x 450$ za 1,16395 večji od $\log_x 40$. Kolika je osnova tega sestava in kolika sta omenjena logaritma?
4. V enakokrakem trikotniku sta dani osnovnica c in krak a. Trikotniku je včrtan krog in krogu narisana tangenta, vzporedna osnovnici c. Določi ploščino trikotnika, ki je nad tangento!

Druga skupina (7. razred):

1. Določi število a tako, da bo imela enačba

$$2x^5+2x^4 - 37x^3+ax^2 - 49x+6 = 0$$

en koren enak -1 in jo nato reši!

2. Za kakšne x ima izraz

$$\sqrt{\log \frac{21 - 9x}{x^2 - 8x + 15}}$$

realno vrednost?

3. Pretvori v produkt vsoto $2+tg\alpha+ctg\alpha$!
4. Kocka z robom a ima diagonalo AB. Izračunaj polmer krogle, ki se dotika onih treh mejnih ploskev, ki se stikajo v oglišču A, in onih treh robov, ki se stikajo v oglišču B! Izračunaj površino onih delov krogelne ploskve, ki segajo izven kocke!

Tretja skupina (8. razred):

1. Pokaži, da je od sedmih celih števil, ki tvorijo aritmetično zaporedje z diferenco 30, samo eno deljivo z 7!
2. Izreži iz lepenke, ki ima obliko kvadrata s stranico $2a$, škatlo (odprto) z največjo prostornino!
3. V izsek iz krogle s polmerom R in kotom ob vrhu osnega preseka 2α včrtaj pokončni stožec z vrhom sredi kapice krogelnega izseka ter z osnovno krožnico na plašču krogelnega izseka! Kot ob vrhu osnega preseka včrtanega stožca je 2β. Kolika je prostornina včrtanega stožca?
4. Inverzijski krožnici s polmerom a je včrtan premočrtni trikotnik, katerega oglišča so tri zaporedna oglišča inverzijski krožnici včrtanega pravilnega šesterokotnika. Načrtaj krožni trikotnik, v katerega se z inverzijo na dani krožnici s polmerom a preslika podani trikotnik! V katerem razmerju se pri tej preslikavi povečajo stranice, v katerem razmerju ploščina? Morda ti uspe še ugotoviti, da se pri preslikavi koti ohranijo.

Ob zaključku tekmovanja smo podelili eno prvo nagrado (Vojska Jurij, 8. razred I. gimn.), dve drugi nagradi (Brajnik Dušan, 8. razred klasične gimn. in Gogala Borut, 6. razred I. gimn.) in šest tretjih nagrad (Novak Janez, 6. razred XII. gimn., Babšek Bogdan, 7. razred klasične gimn., Vrabec Jože, 7. razred klasične gimnazije, Kovačič Mitja, 7. razr. I. gimnazije, Vodopivec Vinko, 6. razred I. gimn. in Gros Mladen, 7. razred klasične gimn.). Štirje udeleženci tekmovanja so prejeli priznanje.

Ta način dela se je izkazal kot zelo dober in zato predvidevamo za prihodnje šolsko leto podoben tečaj iz matematike in fizike, ker vlada tudi za ta predmet veliko zanimanje.

Uršič Stanko, prof., Ljubljana

Takmičenje iz matematike u gimnaziji „Sv. Marković" u Nišu

Svake godine održava gimnazija »Sv. Marković« u Nišu na dan 26. februara, godišnjice smrti tvorca socijalističkog pokreta u Srbiji proslavu. U okviru proslave, objavljuju se dva meseca prije početka takmičenja naradne teme iz svih grana nauke. Naradna tema iz matematike bila je »Uloga matematike u radu drugih nauka«. A održavaju se i sportske priredbe. Na proslavi suđelovali su učenici gimnazije iz Strumice, Aleksinca, Prokupља i Niša.

Naradu iz matematike pripala je ove godine Jeremić Biljani, uč. 6_4 raz. gimn. »Sv. Marković« Niš.

Vrlo je odgojno organizovati takva natjecanja u školama, jer ona podižu interes učenika za pojedine predmete i daju im mnogo podstreka za uspešan rad.

Jeretić Đurđe, uč. 6 r. g. Niš

Takmičenje iz matematike u Zagrebu

Kvalifikaciono takmičenje iz matematike uč. 6. i 7. raz. zagreb. gimnazija za šk. god. 1957./58. predviđeno je prema zaključku upr. odbora Društva mat. i fiz. NRH za listopad, a finalno za studeni 1958.

Problem 12 kugli (rešenje)

Po 4 kugle obeležimo slovima: A_1, A_2, A_3, A_4, B_1, B_2, B_3, B_4, C_1, C_2, C_3, C_4, i stavimo na terazije grupu A i B.

I varijanta. Neka su grupa A i grupa B jednake težine. To znači da se nejednaka kugla nalazi u grupi C, a da su sve kugle A i B jednake težine. Stavimo zatim na levu stranu terazija dve kugle grupe C (C_1, C_2), a na drugu stranu kuglu C_3, i jednu poznatu kuglu napr. A_1.

1 podvarijanta. Ako su terazije u ravnoteži, onda je tražena kugla C_4, koja je za vreme drugog merenja bila van vage. Izmerimo je sa jednom od poznatih kugli i ustanovimo da li je lakša ili teža.

2 podvarijanta. Ako prevagne desna strana, onda je kugla C_3 teža ili jedna od kugli C_1 i C_2 lakša. Za treće merenje stavimo njih na vagu, pa ako su u ravnoteži, onda je kugla C_3 teža, a ako prevagne jedna od njih onda je lakša ona iako je na lakšoj strani.

3 podvarijanta. Ako prevagne leva strana, znači da je jedna od kugli C_1 i C_2 teža ili kugla C_3 lakša. Merimo kugle C_1 i C_2, pa ako su u ravnoteži kugla C_3 je lakša, a ako prevavne jedna od njih, onda je teža ona kugla koja je na težoj strani.

II varijanta. Neka prevagne grupa A (na desnoj strani). To znači da su kugle iz grupe C sve jednake težine, a da se tražena (nejednaka) kugla nalazi ili u grupi A ili u grupi B, i to, ili jedna od kugli iz grupe A teža, ili jedna od kugli iz grupe B lakša. Da bi ustanovili koja je tražena kugla, izdvojimo po jednu kuglu iz obe grupe napr.: A_1 i B_1 i ostavimo ih van terazija, zatim jednu kuglu iz grupe B napr.: B_2 prebacimo na desnu stranu, a jedновremeno 2 kugle (A_2 i A_3) iz grupe A prebacimo na levu stranu. Tada na levoj strani imamo 2 kugle iz grupe A i 2 kugle iz grupe B. Da bi mogli da merimo dalje, na desnu stranu dodamo još 2 poznate kugle iz grupe C.

1 podvarijanta. Ako su obe strane jednake, to znači da je jedna od kugli A_1, B_1 nejednaka i to ili je kugla A_1 teža ili je je kugla B_1 lakša (jer su bile na težoj odnosno na lakšoj strani). U tom slučaju merimo kuglu A_1 sa jednom poznatom kuglom C, pa ako su jednake kugla B_1 je lakša, a ako kugla A_1 prevagne onda je ona teža.

2 podvarijanta. Ako prevagne desna strana znači da je ili kugla A_4 teža ili jedna od kugli B_3 i B_4 lakša (ni jedna od kugli A_2 i A_3 na levoj strani ne mogu da budu lakše, jer su bile na težoj strani nити može kugla B_2 biti teža, jer je bila na lakšoj strani). U tom slučaju merimo kugle B_3 i B_4 sa leve strane. Ako su one u ravnoteži, onda je kugla A_4 koja je bila na desnoj strani, tražena kugla i to teža, a ako su nejednake, onda je jedna od njih lakša i to ona koja je na lakšoj strani.

3 varijanta. Ako prevagne leva strana znači da je jedna od kugli A_2 i A_3 teža ili kugla B_2 lakša. Tada merimo kugle A_2 i A_3 sa leve strane. Ako su one jednake, lakša je kugla B_2. Ako su nejednake, teža je jedna od njih i to ona koja je na težoj strani.

III varijanta. Neka prevagne grupa B. Tada je postupak isti kao u *II* varijanti.

M. B.

Rješenje problema o zlatnicima iz prošlog broja

Mnogome će se možda u prvi mah učiniti da postavljeni problem uopće nije rješiv. Psihološki razlog takvom utisku je u ovome: Prva misao koja se nameće kod problema jest, da se iz svake škrinjice izvadi i odvagne po jedan zlatnik. Time bismo doduše saznali u kojoj se škrinjici nalaze lakši zlatnici, ali bi u najnepovoljnijem slučaju morali izvršiti 9 vaganja. Odatle će neki (pogrešno) pomisliti da je zahtjev za rješavanjem problema *jednim* vaganjem nešto kao neki zadatak s 10 (broj škrinjica) nepoznanica a samo jednom (broj vaganja) jednadžbom.

Problem se ipak može lako riješiti, na primjer ovako: Iz prve škrinjice uzmemo jedan zlatnik, iz druge 2, i t. d., konačno iz desete 10. Svih tih $1+2+\ldots+10=55$ zlatnika stavimo na vagu. Kad bi svi zlatnici bili ispravni (težine 10 grama), očitali bi na vagi: 550 grama. Međutim, budući da su neki zlatnici lakši (9 grama) vaga će pokazati manje. Pokaže li 549 grama, znači da je u odabranoj hrpi jedan lakši zlatnik; prema tome prva škrinjica sadrži lakše zlatnike, jer smo *iz nje* uzeli *jedan* zlatnik. Pokaže li vaga 548 grama, znači da su u hrpi 2 lakša zlatnika, t. j. druga škrinjica sadrži lakše zlatnike. Općenito, ako vaga pokaže $(550-k)$ grama, znači da su u k-toj škrinjici lakši zlatnici.

Navedeno rješenje očito nije jedino. Mogli smo na pr. iz prve škrinjice ne uzeti ni jedan zlatnik, iz druge uzeti 1, iz treće 2, i t. d., konačno iz desete 9. Opet bi po razlici između 450 grama i očitane vrijednosti odmah znali gdje su lakši zlatnici. (Ovo rješenje je uostalom najjednostavnije u tom smislu, što je tu najmanja moguća hrpa zlatnika, koju stavljamo na vagu). Općenito bismo problem mogli riješiti tako, da iz i-te po redu škrinjice uzmemo k_i zlatnika, gdje samo brojevi k_i za $i=1, 2, \ldots, 10$ moraju biti međusobno različiti ne-negativni cijeli brojevi.

Još jedna napomena. Iz razloga psihološke prirode bit će čovjeku redovno teže riješiti problem, ako mu ga postavimo za slučaj *manjeg* broja škrinjica, na pr. 3 do 5. Očito je naime, da opće rješenje u principu uopće ne ovisi o broju škrinjica. Veći broj škrinjica *olakšava* rješavanje, jer upitanom sugerira, da vjerojatno postoji neko rješenje, koje ne ovisi bitno o broju škrinjica. Kod manjeg broja naprotiv skloni smo pomisliti, da je baš taj broj bitan za mogućnost rješenja, a to nas može odvesti od direktnog puta rješenja prema njegovom zaobilaznom traženju kombiniranjem.

V. D.

NOVE KNJIGE

Dr. Josip Lončar: OSNOVI ELEKTROTEHNIKE. Od ovog općenito poznatog djela postoji već IV., vrlo prošireno izdanje. Knjiga I. izišla je g. 1956., a upravo je sada izišla i Knjiga II. Nakladnik: »Tehnička knjiga«, Zagreb, Jurišićeva 10. Cijena: u poluplatnu Knj. I. Din 800.—, Knj. II. Din. 860.—; u platnu Knj. I. Din 960.—, Knj. II. Din 1020—.

ZADACI I RJEŠENJA

A) Zadaci iz matematike*

308.** Обим датог правоугаоника, изражен у метрима, је $2s$; кад се његова дужина продужи за $5\,m$, а ширина за $3\,m$, добије се нов правоугаоник чија је површина за $195\,m^2$ већа од површине датог правоугаоника.

Нека су x и y дужина и ширина датог правоугаоника.

а) Изразити x и y као функцију од s,

б) За које вредности s је проблем могућ?

в) Одредити s кад се дати правоугаоник сведе на квадрат.

309. Дата је квадратна једначина

$$16x^2 - 24x \sin\alpha + 2 - 3\sin\alpha = 0,$$

у којој α представља угао једног троугла.

За које вредности α су корени дате једначине реални? Изразити $tg\,\frac{\alpha}{2}$ за најмању могућу вредност угла α.

* Rješenja poslati najkasnije do 15. VII.

310. Дата је једначина

$$ax^2 + bx + c = 0 \qquad (1)$$

који услов треба да испуне a, b и c кад су корени једначине (1) везани релацијом

$$(2) \quad ax_1 + \beta x_2 + \gamma = 0,$$

где су α, β и γ дати бројеви? Показати да су при услову (2) корени једначине (1) реални, и да се могу изразити рационално.

311. Ако је a ма који цео број, тада доказати да је

$$a^7 - a = 2S_1(a-1)(a^4 + a^2 + 1)$$

где је S_1 збир природних бројева a.

312. Збroj квадрата двају бројева једнак је 78416, њихов најмањи заједнички вишекратник је 520. Који су то бројеви?

313. Одредити остатак при дијељењу броја $11^{100} + 13^{200} + 17^{300}$ бројем 7.

314. Наћи сумu од $m + n$ првих чланова аритметичке прогресије, у којој је m-ти члан једнак n, а n-ти члан једнак m.

315.* Правилан шестерокут раздијелити на 3 једнака дијела помоћу 2 паралеле са страницом. Riješi računski i konstruktivno.

316. Испитај ток функције $y = \dfrac{\sin x + \cos x}{\sin 2x}$.

317. Крivulja $y = \sin x + \sqrt{3}\cos x$ ротира око осi x. Koliki je obujam rotacionog tijela između $x = 0$ i $x = \dfrac{2\pi}{3}$?

318. У троkутu је задано: a, v_a и ρ; нека се riješi trokut.

319. Ако су задане квадратне једнадžбе

$$a_1x^2 + b_1x + c_1 = 0, \quad a_2x^2 + b_2x + c_2 = 0,$$

напиši квадратну једнадžбу gdje је svaki korijen omjer između jednog korijena prve jednadžbe i jednog korijena druge jednadžbe.

320. Одреди бројеве m и n тако да се једнадžба

$$x^3 - 81x + 756 = 0$$

може написати у облику

$$\left(\frac{x-m}{x-n}\right)^3 = \frac{m}{n}$$

и одреди корijене те једнадžбе.

B) Zadaci iz fizike

156. Neka se odredi vrijeme t ekspozicije fotografiranja iz slike kuglice, koja slobodno pada pred centimetarskom skalom. Kuglica je puštena kod znaka 0, a na fotografiji se slika kuglice razvukla od znaka $n_1 = 4$, do znaka $n_2 = 16$ cm.

157. Masa Mjeseca iznosi 1/80 mase Zemlje, a polumjer Mjeseca je 1/4 polumjera Zemlje. Koliko bi skočio u vis na Mjesecu čovjek, koji na Zemlji skoči 1,8 metara?

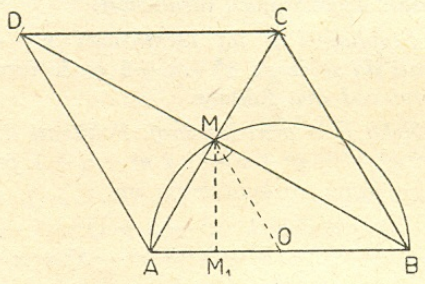
158. Električni generator daje napon od 230 V. Otpor žice, koje dovode i odvode struju do niza paralelno spojenih žarulja iznosi 1 Ω. Neka se nađe najveći broj žarulja, koje će dobro svijetliti u tom krugu, ako svaka žarulja treba 0,5 A pri naponu od 220 V, a loše sja, ako je napon niži.

159. Na istoj osovini rade električni motor i generator. Zadan je koeficijent iskorištenja motora, a instrumenti uređaja omogućuju mjerenje snage, koju motor uzima iz gradske mreže i snage, koju generator daje potrošaču. Koliki je koeficijent iskorištenja generatora?

160. Kratkovidna osoba ne može jasno vidjeti predmet koji je dalje od 2 m. Kolika mora biti žarišna daljina leće naočala, da bi vidjela jasno dalek predmet?

C) Rješenja iz matematike

294. *Дат је полукруг пречника $AB = 2R$ и једна тачка M на кружној линији. Нека је M_1 пројекција тачке M на AB. Тетива AM продужена је за $MC = AM$, а тетива MB за $MD = BM$.*



Показати да је четвороугао $ABCD$ ромб. Израчунати његове дијагонале и површину, као и површину кружних отсечака над тетивама AM и BM ако је дато $MM_1 = \dfrac{R\sqrt{3}}{2}$.

Угао AMB је прав као угао над пречником са теменом на луку. Тај угао је једнак углу CMD (као унакрсни) а самим тим су прави и углови AMD и AMB. Дужи AC и BD су нормалне у тачки M где се уједно и полове ($AM = CM$, $BM = DM$). Пошто су те дужи дијагонале датог четвороугла $ABCD$, он је ромб.

Како је дуж $MM_1 = \frac{R\sqrt{3}}{2}$ као висина помоћног ΔAMO са основицом R тај троугао је равнострани. $AM = R$, а дуж $AC = d_1 = 2R$, из ΔAMB

$$\overline{MB}^2 = \overline{AB}^2 - \overline{AM}^2, \quad \overline{MB}^2 = 4R^2 - R^2,$$

$$\overline{MB}^2 = 3R^2, \quad MB = R\sqrt{3}, \quad MB = \frac{d_2}{2},$$

$$d_2 = 2R\sqrt{3}, \quad P_{ABCD} = \frac{d_1 \cdot d_2}{2} = 2R^2\sqrt{3}.$$

Површина оба отсечка над тетивама AM и BM је површина полукруга мање $P_{\Delta} ABM$.

$$P_1 + P_2 = \frac{R^2\pi}{2} - \frac{R^2\sqrt{3}}{2} = \frac{R^2}{2}(\pi - \sqrt{3}),$$

површина отсечка над тетивом AM

$$P_1 = \frac{R^2\pi\, 60}{360} - \frac{R^2\sqrt{3}}{4} = \frac{R^2}{2}\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right),$$

површина отсечка над тетивом BM

$$P_2 = \frac{R^2}{2}(\pi - \sqrt{3}) - \frac{R^2}{2}\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) =$$

$$= \frac{R^2}{2}\left(\frac{2\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right).$$

Пауковић Владислав
7 р. г. Велика Плана

295. *Израчунати вредност производа*

$$(x^3 + x^2 - 1)(x^2 - x + 1)$$

и написати одговарајућу идентичност.

а) *Стављајући у тој идентичности* $x = -y$ *показати да се израз* $x^5 + x + 1$ *може изразити као производ два фактора.*

b) *Нека је* n *природан број. Показати да су бројеви* $n^5 + n$, $n^5 + n - 1$ *и* $n^5 + n + 1$ *прости само за једну вредност броја* »n«.

$$(x^3 + x^2 - 1)(x^2 - x + 1) =$$
$$= x^5 - x^4 + x^3 + x^4 - x^3 + x^2 - x^2 + x - 1,$$
$$(x^3 + x^2 - 1)(x^2 - x + 1) = x^5 + x - 1.$$
$$x = -y, \quad y = -x$$

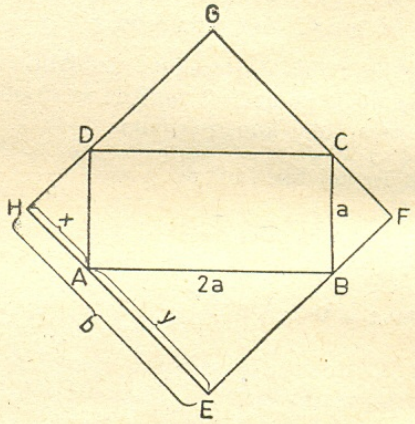
$a)$ $x^5 + x + 1 = -y^5 - y + 1 = -(y^5 + y - 1) =$
$= -(y^3 + y^2 - 1)(y^2 - y + 1) = -(-x^3 + x^2 - 1) \cdot$
$\cdot (x^2 + x + 1) = (x^3 - x^2 + 1)(x^2 + x + 1)$
$x^5 + x + 1 = (x^3 - x^2 + 1)(x^2 + x + 1).$

$b)$ $n^5 + n$; $n^5 + n + 1$; $n^5 + n - 1$. Vidimo svaki se može napisati kao proizvod dva faktora: $n^5 + n = n(n^4 + 1)$; $n^5 + n + 1 =$
$= (n^3 - n^2 + 1)(n^2 + n + 1)$
$n^5 + n - 1 = (n^3 + n^2 - 1)(n^2 - n + 1)$.
U општем случају ово су сложени бројеви (јер су дати у облику производа). Изузетак је случај $n = 1$, јер се тада своде на просте бројеве 2, 3, 1.

Ковач Антал
уч. 7_5 р. г. Sombor

296. *Дат је правоугаоник* $ABCD$ *чије су стране* $AB = 2a$ *и* $BC = a$. *Над његовим странама, као над хипотенузом, конструисани су са спољашње стране, равнокраки правоугли троугли* AEB, BFC, CGD *и* DHA.

Доказати да је четвороугао $EFGH$ *квадрат и одредити однос површине тог квадрата и датог правоугаоника.*



Четвороугао $EFGH$ је квадрат: HDG, FCG, FBE и HAE леже на истим правама (угао HDG нпр. = 180°), стране HE, FG, HG, EF су једнаке, јер су им одговарајући делови једнаки, углови H, G, E, F су прави.

$$P_{\text{прав.}} = 2a^2, \quad P_{kb.} = b^2; \quad b = x + y,$$

$$2x^2 = a^2, \quad x = \frac{a}{\sqrt{2}}, \quad 2y^2 = 4a^2, \quad y = a\sqrt{2}.$$

дакле је

$$b = \frac{a}{\sqrt{2}} + a\sqrt{2} = \frac{\sqrt{2}(a + 2a)}{2} = \frac{3a\sqrt{2}}{2},$$

па је $P_{kb.} = \frac{9a^2}{2}$. Зато је

$$P_{kb.} : P_{\text{прав.}} = \frac{9a^2}{2} : 2a^2 = 9 : 4.$$

Љубивоје Миливојевић
уч. 8_3 р. г. Аранђеловац

297. *Riješiti slijedeći sistem jednačaba:*

$$x + y = 150°, \quad cos^2x + cos^2y = \frac{1}{4}.$$

Zbrajanjem jednačaba:

$$ccs^2x + sin^2x = 1$$
$$cos^2x - sin^2x = cos\ 2x,$$

izlazi $$cos^2x = \frac{1 + cos\ 2x}{2}.$$

Prema tome, drugu jednadžbu zadanog sistema možemo pisati u jednostavnijem obliku:

$$cos\ 2x + cos\ 2y = -\frac{3}{2},$$

ili $$cos\ (x + y)\ cos\ (x - y) = -\frac{3}{4}.$$

Kako je

$$cos\ (x + y) = cos\ 150° = -\ cos\ 30° = -\frac{\sqrt{3}}{2},$$

slijedi $$cos\ (x - y) = \frac{3}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

i odatle

$$x - y = k \cdot 360° \pm 30° \ (k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots).$$

Dakle je

$$x = k \cdot 180° + 90°, \quad y = -k \cdot 180° + 60°,$$
$$x = k \cdot 180° + 60°, \quad y = -k \cdot 180° + 90°.$$

Miketinac Milivoj
8.d r. 3. gimn. Zagreb

298. *Središte trokutu ABC upisane kružnice je točka* $S\ (1, -\frac{7}{2})$, *a stranice su mu* $a = 4$, $b = 13$, $c = 15$; *vrh A nalazi se na pravcu* $p \equiv y + x - 14 = 0$, *a točka D simetrale kuta* α *u sjecištu pravaca BC i* $q \equiv 35x + y = 0$. *Nadi koordinate vrhova A, B i C!*

Koordinate vrha A x_1, y_1 dobivamo iz sistema:

$$AS^2 = \rho^2 + (s - a)^2 = \frac{9}{4} + 144 = \frac{585}{4},$$

$$(x_1 - 1)^2 + \left(y_1 + \frac{7}{2}\right)^2 = AS^2 = \frac{585}{4},$$

$$x_1 + y_1 - 14 = 0. \quad \text{Izlazi}$$

$$(x_1)_1 = 7, \ (y_1)_1 = 7, \ (x_1)_2 = \frac{23}{2}, \ (y_1)_2 = \frac{5}{2}.$$

Prema tome, jednadžbe simetrale kuta kod vrha A su:

$$(s_\alpha)_1 \equiv 7x - 4y = 21, \quad (s_\alpha)_2 \equiv 8x - 14y = 57,$$

Sjecišta simetrala s pravcem q su:

$$D\left(\frac{1}{7}, -5\right), \quad D'\left(\frac{19}{166}, -\frac{665}{166}\right).$$

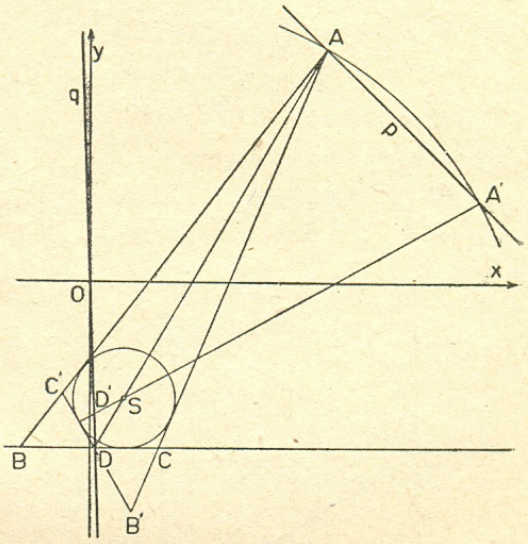
Kako se točka D mora nalaziti izvan trokutu upisane kružnice:

$$(x - 1)^2 + \left(y + \frac{7}{2}\right)^2 = \frac{9}{4},$$

to ne zadovoljava D', jer je

$$\left(\frac{19}{166} - 1\right)^2 + \left(-\frac{665}{166} + \frac{7}{2}\right)^2 < \frac{9}{4},$$

pa prema tome ni $(s_\alpha)_2$, ni $(x_1)_2$, $(y_1)_2$.



Dakle, koordinate vrha A su (7,7), a točke $D\left(\frac{1}{7}, -5\right)$.

Kako su stranice trokuta ABC tangente tom trokutu upisane kružnice povučenih iz točaka A i D, s jednadžbama:

$$(t_A)_1 \equiv 12x - 5y = 49,$$
$$(t_A)_2 \equiv 4x - 3y = 7,$$
$$(t_D)_1 \equiv y = -5,$$
$$(t_D)_2 \equiv 56x + 33y = -157,$$

to su vrhovi B i C njihova sjecišta. Izlazi:

$$B\ (-2, -5), \quad B'\left(\frac{16}{13}, -\frac{89}{13}\right),$$

$$C\ (2, -5), \quad C'\left(-\frac{4}{5}, -\frac{17}{5}\right).$$

Miketinac Milivoj
8.d r. 3. gimn. Zagreb

299. *Odredi oni enakokraki trikotnik, včrtan danemu krogu, ki opiše največjo prostornino, če ga zavrtimo okoli tangente skozi njegov vrh.*

Ploščina trikotnika je

$$P = \frac{a}{2}x$$

Iz trikotnika SC_1B pa izhaja

$$a^2 = 4R^2 - 4(x - R)^2 = 4(2Rx - x^2)$$

to je

$$P = x\sqrt{2Rx - x^2}$$

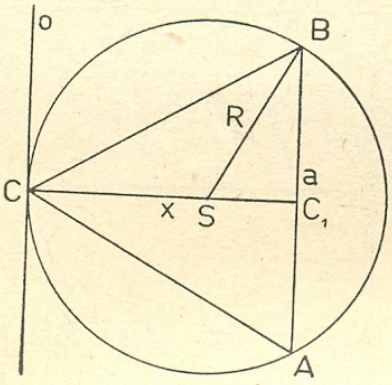
Ker je x težišnica ΔABC, je težišče oddaljeno od o za $\frac{2x}{3}$ in volumen rotacijskega telesa, ki nastane če se ΔABC zavrti okoli o je po prvem Guldinovem pravilu

$$V = y = 2\pi \cdot \frac{2x}{3} \cdot x\sqrt{2Rx - x^2}$$

$$y = \frac{4\pi}{3} x^2 \sqrt{2Rx - x^2}$$

če y odvojamo po x, dobimo

$$y' = \frac{4\pi}{3}\left(2x\sqrt{2Rx - x^2} + \frac{x^2(R - x)}{\sqrt{2Rx - x^2}}\right) = 0$$



Funkcija $y = f(x)$ ima ekstrem, kadar je $y' = 0$ (seveda ne vedno). Torej je treba rešiti enačbo

$$2x\sqrt{2Rx - x^2} + \frac{x^2(R - x)}{\sqrt{2Rx - x^2}} = 0$$

$$2x^2(2R - x) + x^2(R - x) = 0$$

$x_{1,2} = 0$, ta rešitev ne pride v poštev, ker tu ni ekstrema, dalje je

$$4R - 2x + R - x = 0, \quad 5R - 3x = 0$$

$$x = \frac{5}{3} R \quad \text{in} \quad a = \frac{2}{3} R\sqrt{5}.$$

Tej rešitvi zadošča maksimum funkcije y. (Da je to res, je razvidno iz naloge).

Janez Lesjak
dij. 6. r. gimn. Kočevje

300. *U funkciji* $y = \dfrac{7x^2 + ax}{x^2 + 2x - 3}$ *odredi* a *tako da ona prolazi maksimumom za* $x = -2$. *Prouči mijenjanje te funkcije, kad se* x *mijenja od* $-\infty$ *do* $+\infty$ *i nacrtaj pripadnu sliku. [Jedinica na osi* y *ne mora biti jednaka kao na osi* x*]. Zadatak se može riješiti i bez računa derivacija.*

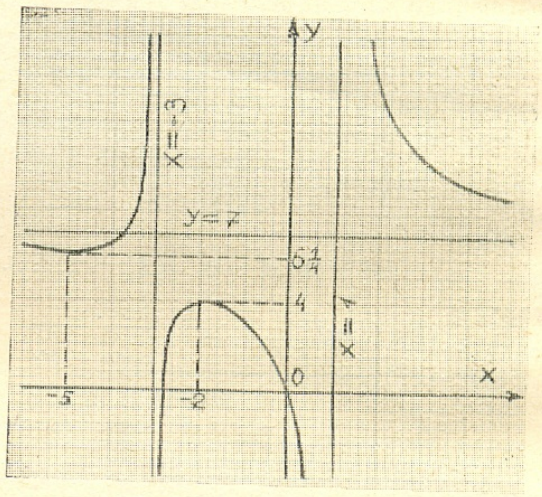
Potrebno je ispitati, koje sve vrijednosti može poprimiti y za sve realne vrijednosti od x. Iz $y = \dfrac{7x^2 + ax}{x^2 + 2x - 3}$ dobije se jednadžba

$$x^2(y - 7) + x(2y - a) - 3y = 0. \quad (1)$$

Kako se naglašava da jednadžba (1) treba imati realne korijene (x_1 i x_2), to također mora biti $D \geqslant 0$, t. j.

$$16y^2 - (4a + 84)y + a^2 \geqslant 0 \quad \text{ili}$$

$$y_1 \equiv \frac{1}{8}(a + 21 - \sqrt{(a+21)^2 - 4a^2}) \geqslant y \geqslant \frac{1}{8}(a + 21 + \sqrt{(a + 21)^2 - 4a^2}) \equiv y_2.$$



Ovdje u stvari y_1 predstavlja maksimum, a y_2 minimum funkcije y. Ako sad u jednadžbu $y_1 = y$ uvrstimo $x = -2$, (jer se zahtijeva, da za $x = -2$ funkcija prolazi maksimumom), dobivamo jednadžbu

$$\frac{1}{8}(a + 21 - \sqrt{(a + 21)^2 - 4a^2}) =$$

$$= -\frac{1}{3}(28 - 2a)$$

iz koje se odredi $a = 20$. S time u vezi funkcija

$$y = \frac{7x^2 + ax}{x^2 + 2x - 3} \quad \text{poprima oblik}$$

$$y = \frac{7x^2 + 20x}{x^2 + 2x - 3}.$$

Uvrštavanjem $a = 20$ u y_1 i y_2, dobivamo kod funkcije y maksimum 4 z $x = -2$ i minimum $6\frac{1}{4}$ za $x = -5$. Zatim nalazimo:

$\lim_{x \to \pm\infty} y = 7$; $\lim_{x \to -3} y = +\infty$, ako je $x < -3$;

$\lim_{x \to -3} y = -\infty$, ako je $x > -3$;

$\lim_{x \to 1} y = -\infty$, ako je $x < 1$;

$\lim_{x \to 1} y = +\infty$, ako je $x > 1$.

S obzirom na ove slučajeve čitav tok funkcije je ovaj:

x	$-\infty$		-5		-3		-2		1		$+\infty$
y	7	$\searrow$	$6\frac{1}{4}$	$\nearrow$	$\pm\infty$	$\nearrow$	4	$\searrow$	$\mp\infty$	$\searrow$	7

K tome je još $y = 0$ za $x = -\frac{20}{7}$ i za $x = 0$. Sve te rezultate predočuje grafik funkcije

$$y = \frac{7x^2 + 20x}{x^2 + 2x - 3}.$$

(Jedinica na osi x je dva puta veća od jedinice na osi y).

Iz slike se vidi, da funkcija y ne može poprimiti vrijednosti u intervalu $\left(4,\ 6\frac{1}{4}\right)$, da je prekidna na mjestima $x = -3$ i $x = 1$, da za $x = -2$ prolazi maksimumom 4, i t. d.

Basar Ivan, uč. 8. b r. g. Karlovac

Zadatak se može riješiti i računom derivacija. Iz

$$y'(-2) = \left[\frac{-ax^2 + 14x^2 - 42x - 3a}{(x^2 + 2x - 3)^2}\right]_{x=-2}$$

izlazi $a = 20$.

$y''(-2)$ ima znak od $\frac{1}{9}(4a - 98)$, što je za $a = 20 < 0$, dakle je $y(-2) = 4$ maksimum funkcije.

Miketinac Milivoj
8.d r. 3. g. Zagreb

301. *Ura prehiti v 24 urah za 10 minut. Opoldne smo jo točno naravnali. Koliko je ura, če kaže ura popoldne istega dne 6?*

Ura kaže, če prehitava, toliko več, za kolikor je prehitila od tedaj, ko smo jo točno naravnali. Vna šem primeru prehiti v 1 uri za $\frac{10}{24} = \frac{5}{12}$ minute, v x urah pa za $\frac{5x}{12}$ minut, kjer označuje x točno uro. Enačba se zato glasi:

$$x \cdot 60 + x \cdot \frac{5}{12} = 6 \cdot 60 \quad \text{ali} \quad 60x + \frac{5x}{12} = 360$$

$$x = \frac{4320}{725} = \frac{864}{145} = 5\frac{139}{145}.$$

Točna ura je torej $5^h\ 57^m\ 31\frac{1}{29}^s$.

Maček Vilko
dij. 5.b r. kl. g. Ljubljana

Drugo rješenje:

24 sati 10 min. : 24 sati = 6 sati : x
1450 : 1440 = 360 : x
145 : 144 = 360 : x
$51840 = 145x$

$$x = \frac{51840}{145} = \frac{10368}{29}$$

$x = 357{,}5172$ minuta $x = 5$ sati 57 minuta 31 sekund, i $\frac{1}{29}$ sekunde.

Bazler Mikloš
5.b r. g. Sombor

302. *V katerih številčnih sistemih velja:*

a) $4 \cdot 13 = 100$,
b) $40 \cdot 20 = 1000$,
c) $101^2 = 10000$.

a) Za osnovo vzememo x,

$4 \cdot x^0(1 \cdot x^1 + 3 \cdot x^0) = 1 \cdot x^2 + 0 \cdot x^1 + 0 \cdot x^0$,
$4(x + 3) = x^2$, $x^2 - 4x - 12 = 0$,
$(x - 6)(x + 2) = 0$, $x = 6$ $[x = -2]$.

Pri *a)* je osnova 6.

b) $40 \cdot 20 = 1000$, $(4x^1 + 0 \cdot x^0)(2 \cdot x^1 + 0 \cdot x^0) = 1 \cdot x^3 + 0 \cdot x^2 + 0 \cdot x^1 + 0 \cdot x^0$, $4x \cdot 2x = x^3$
$8x^2 = x^3$, $[x = 0]$, $x = 8$.

Pri *b)* je osnova 8.

c) $101^2 = 10000$, $(1 \cdot x^2 + 0 \cdot x^1 + 1 \cdot x^0)^2 = 1 \cdot x^4 + 0 \cdot x^3 + 0 \cdot x^2 + 0 \cdot x^1 + 0 \cdot x^0$,
$(x^2 + 1)^2 = x^4$, $x^4 + 2x^2 + 1 = x^4$,

$$2x^2 = -1, \quad x^2 = -\frac{1}{2}, \quad x = \pm i\sqrt{\frac{1}{2}}.$$

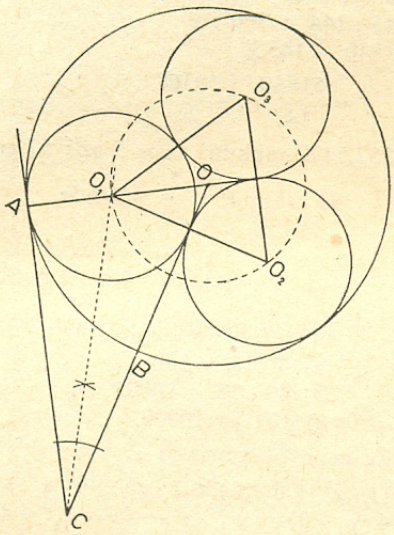
Ni sistema, ki bi mu to ustrezalo.

Ješe Hema
6.b I. gimn. Kranj

303. *У круг полупречника $R = 10$ ст треба уписати три једнака мања круга полупречника r тако да сваки од четири круга додирује остала три. Решити конструктивно и рачунски.*

Нека је O центар датог, а O_1, O_2, O_3 центри уписаних кругова. $\sphericalangle AOB = 60^0$. Због $OB \perp O_1O_2$ конструкцију вршимо овако: У датом кругу O повучемо полупречнике AO и OB тако да је $\sphericalangle AOB = 60^0$. Продужимо затим OB до пресека с тангентом у A и повучемо симетралу добијеног угла ACO. Пресек те симетрале са AO је центар O_1, па нам је познато O_1O. Овом дужином опишемо круг концентричан датом и у тако добијени помоћни круг уписмо равностран троугао $O_1O_2O_3$. Из темена добијеног троугла опишемо кругове полупречника једнаког половини стране

тог троугла и тако налазимо тражене кругове O_1, O_2 и O_3.



Рачунско решење: $AO = AO_1 + O_1O$, т.j.

$R = r + \frac{2r}{3}\sqrt{3}$. Одатле добијамо

$r = R(2\sqrt{3} - 4) = 4{,}64$ *cm.*

Кирић Миодраг
6 р. II в. м. г. Зрењанин

*

Riješili zadatke iz 3. broja

Bajtarević Ahmed, 7. r. gim. Visoko, 297, 304; *Baličević Ivan*. 8b r. g. Vukovar, 294, 297, 299, 300, 304, 306; *Basar Ivan*, 8b r. g. Karlovac sve zadatke 294 — 307, *Bazber Mikloš*, 5b r. g. Sombor, 296, 301; *Čahuk Aladár*, 8 r. g. M. Sobota, 294, 297, 304; *Elezović Ćamil*, 4b maš. STŠ Mostar, 294, 297, 304; *Fehér Kamil*, 5b r. gim. Sombor, 296, 301; *Fill Franja*, uč. g. Sombor, 296, 301; *Gros Mladen*, 7a r. kl. g. Ljubljana, 294, 297, 299, 304; *Guljašević Marko*, 7a r. g. Vukovar, 296; *Hendeković Josip*, 7b r. 2. g. Zagreb, 294, 297, 304, 306; *Ješe Hema*, 6b r. 1. g. Kranj, 294, 296, 297, 299, 300, 302, 303, 304; *Josić Danilo*, 7_2 r. g. Sombor, 294, 297, 305; *Kovač Antal*, 7_5 r. g. Sombor, 294, 295, 296, 297, 302, 303, 304; *Kulišić Petar*, 8a r. g. Dubrovnik, 294, 299, 304, 305; *Lesjak Janez*, 6. r. g. Kočevje, 294, 295, 296, 297, 299, 304, 305; *Maček Vilko*, 5b r. kl. g. Ljubljana, 294, 296, 301, 302, 303; *Marjanović Borislav*, 5c r. g. »F. Višnjić« Bijeljina, 294, 301, 303; *Miketinac Milivoj*, 8.d r. 3. 306, 307; *Nikolova Cvetanka*, 6a kl. g. »J. g. Zagreb, 294, 297, 298, 299, 300, 304, 305, B. Tito«, Bitola, 296, *Petričević Josip*, 8.d r. 3. g. Zagreb, 294, 297, 298, 299, 300, 304, 305, 306; *Radolović Josip*, 8a r. g. »B. Semelić« Pula, 294, 297, 299 (djel.), 300, 304, 305 (djel.), 307; *Rant Jože*, 7. r. kl. g. Ljubljana, 304; *Rind Ištvan*, 7b r. a. M. Pijade, Subotica, 294, 297, *Sabli Marton*, 7b r. g. St. Bečej, 297; *Skender Davorin*, 8.d r. 3. g. Zagreb, 294, 297, 298, 299, 300, 304, 305, 306; *Stojčeva Penka*, 6 kl. g. »J. B. Tito«, Bitola, 296; *Šoštarić Ivanka*, 7c r. 1. gim. Zagreb, 294, 297; *Todorović Milenko*, 4b maš. STŠ, Mostar, 294, 297, 304; *Topolovec Velimir*, 7c r. g. Zagreb, 297; *Virs Ilona*, 7 r. gim. Ćuprija, 297; *Zečević Dragoljub*, 1c g. STŠ, Sarajevo, 204, 296; *Zlobec Sanjo*, 8c r. 1. g. Zagreb, 294, 296, 297, 298, 299, 300, 303, 305; *Анђић Александар*, 7_1 р. г. Трстеник, 294, 296; *Блажески Богоја*, 8а р. г. Охрид, 295 (дел.), 297; *Богданов Лазар*, 5_2 1 беогр. г. 296; *Божиновић Севдалина*, 8_4 р. 2 г. Крагујевац, 294, 304, 306; *Боричић Зоран*, г. »Св. Марковић«, Ниш, 294, 296, 299; *Булатовић Милица*, 1_3 СТШ Титоград, 294, 296, 303; *Васковарџић Р. Станко*, 8_1 р. г. Трстеник, 297, 304, 305; *Војиновић Раденко*, 8_3 р. гим. Пљевља, 296, 304; *Драшковић Радоје*, 7а р. г. Цетиње, 294; *Ђирић Божидар*, 6а р. г. »Св. Марк.« Нови Сад, 296; *Јевтић Михајло*, 8_3 р. г. Параћин, 294, 296, 297, 303, 304; *Јеремић Биљана*, 6_4 р. г. »Св. Марк.«, Ниш, 294, 295, 296, 302, 303; *Јеремић Ђурђе*, 6_3 р. г. »Св. Марк.«, Ниш, 294, 295, 296, 299, 303; *Јовчевски Стојман*, 7а кл. гимн. Куманово 294, 297; *Кирић Миодраг*, 6_3 р. 2 г. Зрењанин, 294, 296, 303; *Крстић Добривоје*, 7_3 р. г. »Ст. Сремац« Ниш, 294, 296, 297, 301; *Латић Миодраг*, $Г_3$ СТШ Титоград, 294, 296; *Летић Милан*, 7с р. г. »М. Пијаде«, Суботица, 394; *Љотић Марина*, 5_3 р. г. »Ст. Сремац«, Ниш, 295; *Миливојевић Љубивоје*, 8_3 р. г. Аранђеловац, 394, 396; *Миић Мирко*, 5_5 р. г. »Св. Марк.« Ниш, 294, 297; *Најдова Душанка*, 5 кл. гимн. »Ј. Б. Тито«, Битола, 296, 303; *Николић Драгољуб*, 7а р. г. Цетиње, 294; *Новаковић Тихомил*, 7_2 р. г. »Ст. Сремац«, Ниш, 294, 296; *Павловић Владан*. 7_3 р. г. »Св. М«, Светозарево, 294, 304; *Пауксвић Владислав*, 7 р. г. В. Плана, 294, 296, 301; *Перовић Глигорије*, 2 р. СТШ Титоград, 296, 297; *Петровић Зоран*, 8_1 р. 8 годиш. шк. »Маршал Тито«, Ниш, 296; *Пихајлић Амалија*, 6а р. гимн. »М. Пијаде«, Нови Сад, 295, 303; *Прлинчевић Ратомир*,

* Zbog nestašice prostora donijet ćemo rješenja zadataka 304 — 307 u slijedećem broju.

7_3 p. gimn. Priština, 294, 296, 297, 304; *Radić Jovanović*, 7_3 p. g. Priština, 296, 304; *Radovanović Zoran*, 5_2 p. g. »Sv. Marko.« Niš, 296; *Radovanović Dušan*, 7_2 p. gimn. Priština, 294, 296, 297, 301, 303, 304; *Ražnatović Zarija*, 7_3 p. g; Trstenik, 294, 297, 304; *Ristić Milka*, 6_3 p. gimn. »Ct. Sremac« Niš, 296; *Stavrin Ratko*, 7a p. g. Ohrid, 296; *Stanojević Jevrosima*, 7 p. g. »Sv. Marko.« Niš, 294, 296, 297; *Tatić Tanasije*, 8_3 p. g. »Sv. Marko.« Niš, 294, 297, 298, 304, 306; *Ćunić P. Miodrag*, 8_1 p. g. »Ct. Sremac« Niš, 294, 296, 297, 304, 306; *Šćepanović Radovan* 8 p. g. Pljevlja, 294, 296, 297, 301, 303, 304; *Šutić M. Tomislav*, 7_4 p. gimnazije Čačak, 294, 297. *Dvizac Menail*, II. Am STŠ Mostar, 294, 296, 297, 303, 304, *Kulišić Petar*, 8. a r. g. Dubrovnik, 297, 300; *Petrović Grozdan*, 5_3 p. g. »Ct. C.« Niš, 295; *Srdinovski Naum*, 8 p. g. Bitola, 294, 297; *Turčinović Ljubomir*, 6 d p. g. Cetinje, 296.

Rješenja zadataka iz fizike

151. *Gdje se nalazi točka u kojoj je privlačna sila Zemlje jednaka privlačnoj sili Mjeseca, ako je udaljenost od Zemlje do Mjeseca 384 000 km, a masa Zemlje je 81 puta veća od mase Mjeseca?*

Sila kojom privlači Zemlja neko tijelo je po Newtonovom zakonu gravitacije:

$$F_z = k\frac{M_z\, m}{r_z^{\,2}}$$

gdje je M_z masa Zemlje, r_z udaljenost tog tijela od središta Zemlje a k konstanta gravitacije.

Sila kojom privlači Mjesec to isto tijelo je:

$$F_m = k\frac{M_m\, m}{r_m^{\,2}}$$

gdje je M_m masa Mjeseca, a r_m udaljenost tog tijela od središta Mjeseca.

U točki gdje je privlačna sila Zemlje jednaka privlačnoj sili Mjeseca mora biti

$$F_z = F_m,$$

$$k\frac{M_z\, m}{r_z^{\,2}} = k\frac{M_m\, m}{r_m^{\,2}}.$$

Kako je: $M_z = 81\, M_m$ iz gornje jednadžbe izlazi:

$$k\frac{81\, M_m\, m}{r_z^{\,2}} = k\frac{M_m\, m}{r_m^{\,2}},$$

odnosno

$$\frac{r_z^{\,2}}{r_m^{\,2}} = 81, \qquad \text{ili}$$

$$\frac{r_z}{r_m} = 9.$$

Dakle, tražena točka dijeli udaljenost Zemlja—Mjesec u omjeru 9 : 1, t. j. tražena točka nalazi se

$$\frac{384\,000}{10}\cdot 9\ \text{km} = \underline{345\,600\ \text{km}}$$

udaljena od Zemlje.

152. *Ako je teret nepoznate mase M na desnoj zdjelici vage, ravnotežu mu drže utezi mase M_1=625 g stavljeni na lijevu zdjelicu vage. Ako je isti teret u lijevoj zdjelici vage, ravnotežu postignemo utezima M_2=676 g, koje smo stavili na desnu zdjelicu vage. Kolika je masa M tereta i koliki je omjer duljine lijevog i desnog kraka vage?*

Neka je desni krak vage dug l_d, a lijevi l_l, onda će u prvom slučaju ravnoteže vrijediti jednadžba:

$$M\, l_d = M_1\, l_l. \qquad (1)$$

(Naime vaga je u ravnoteži, kad je moment sile — sila puta krak — na jednoj strani vage jednak momentu sile na drugoj strani vage).

U drugom slučaju će pak vrijediti jednadžba:

$$M\, l_l = M_2\, l_d. \qquad (2)$$

Iz jednadžbe (1) i (2) izlazi, da je

$$M = \sqrt{M_1 \cdot M_2} = 625 \cdot 676 = \underline{650\ \text{g}}$$

Odnosno iz jednadžbe (1) i (2) izlazi da je

$$\frac{l_l}{l_d} = \sqrt{\frac{M_2}{M_1}} = \sqrt{\frac{676}{625}} = \underline{1{,}04.}$$

153. *Toplina izgaranja jednog kilograma ugljena je 8 000 cal. Izgaranjem tog jednog kilograma ugljena proizvede se para, kojom možemo kroz tri sata tjerati parni stroj sa snagom 0,5 KS. Koliki je korisni koeficijent toga stroja?*

1 kilogram ugljena proizvede 8 000 cal= = 8 000. 427 kpm, (jer je 1 cal = 427 kpm)

= 3 416 000 kpm u tri sata, t. j. u jednoj sekundi taj kilogram ugljena proizvede, dakle, 3 416 000 : (3.3 600) kpm s^{-1} = = 316,3 kpm s^{-1}, t. j. $\frac{316,3}{75} = 4,2$ KS, jer 1 kpm $s^{-1} = \frac{1}{75}$ KS.

Budući da je snaga našeg stroja samo 0,5 KS, to je korisni koeficijent našeg stroja:

$$\eta = \frac{0,5}{4,2} \cdot 100 = \underline{11,9\%}.$$

154. Na neki izvor struje s unutrašnjim otporom od 6 Ω priključen je vanjski otpor od 4 Ω. S kojim otporom R možemo zamijeniti vanjski otpor tako, da toplina, koja se razvija u vanjskom otporu bude jednaka u oba slučaja?

Budući da toplina, odnosno snaga, mora biti u oba slučaja jednaka imamo:

$$I_1^2 \cdot 4 = I_2^2 \cdot R.$$

Struje I_1 i I_2 za oba slučaja možemo prikazati kao odnos elektromotorne sile izvora i otpora u čitavom krugu struje (Ohmov zakon za cijeli krug struje):

$$\frac{E^2}{(4+6)^2} \cdot 4 = \frac{E^2}{(R+6)^2} \cdot R$$

Ako podijelimo jednadžbu sa E^2 i uredimo, imamo

$$R^2 - 13\,R + 36 = 0,$$

odakle lako dobivamo za nas interesantno rješenje

$$\underline{R = 9\,\Omega}$$

155. Generator daje 100 A kod 220 V. Koliko KS mora imati turbina, ako se 90% njezine snage pretvara u električnu snagu?

Snaga našeg generatora u vatima je

$$W = A \cdot V = 220.100\ \text{W} = 22\ \text{kW},$$

a kako je 1 kW jednako 4/3 KS, to taj generator ima:

$$22.\ 4/3\ \text{KS} = 29,3\ \text{KS},$$

a to je 90% snage turbine. Turbina ima dakle snagu:

$$\frac{29,3}{90} \cdot 100 = \underline{32,5\ KS}$$

Riješili zadatke iz fizike iz 3. broja

Basar Ivan, 8.b g. Karlovac, 151, 152, 153, 154, 155; *Bojnec Jernej*, 7.b g. Murska Sobota, 151 (djel.), 152, 153; *Cvetković Dragoš*, 7_1 g. »I. L. Ribar«, S, Mitrovica, 151; *Čahuk Aladár*, 8. g. Murska Sobota, 151, 152, 153, 155; *Gros Mladen*, 7.a kl. g. Ljubljana, 151, 152, 153, 154, 155; *Hendeković Josip*, 7.b 2. g. Zagreb, 151, 152, 155; *Hussu Lojze* 7b 1. g. Celje, 151, 152, 153, 155; *Kulišić Petar*, 8.a g. Dubrovnik, 151, 152, 153, 155; *Miketinac Milivoj*, 8.d 3. g. Zagreb, 151 (djel.), 152 (djel.). 153, 155; *Mitrović Slobodan*, 3_2 STŠ Sarajevo, 151 (djel.), 152, 153 (djel.), 155; *Papuga Đura*, 7_3 g. Vrbas, 151, 152; *Petričević Josip*, 8.d 3. g. Zagreb, 151, 152, 154, 155; *Rind Ištvan*, 7b g. Subotica 152; *Rout J.* Ljubljana, 151; *Stojanović Danilo Dačo*, 8b g. Čačak, 151, 152, 153, 154, 155; *Strekarski Miloslav*, 7 g. Bački Petrovac, 151 (djel.), 152; *Todorović Milenko*, 4.b STŠ Mostar, 151, 152, 153, 154, 155; *Антић Миодраг*, 7 г. Врање, 152; *Булатовић Милан*, 7е, г. »М. Пијаде« Суботица, 151, 152; *Војиновић Раденко*, 8_3 г. Пљевља, 152 (дел.); *Јеремић Ђурђе*, 6_3 г. »Св. Марковић«, Ниш, 155; *Константиновић Милован*, 7_4 гимн. Ћуприја, 152; *Кретић Добривоје*, 7_3 г. »Ст. Сремац«, Ниш, 151; *Летић Милан*, 7е р. г. »М. Пијаде», Суботица, 151, 152; *Радановић Душан*, 7_2 г. Приштина, 151, 152; *Разнатовић Зарија*, 7_3 г. Трстеник, 151; *Ставрић Ратко*, 7с г. Охрид, 153; *Стојковић Зоран*, 5с г. »Св. Марковић« Нови Сад, 152, 155; *Шутић Томислав*, 7_4 г. Чачак, 151, 152, 153; *Dvizac Menail*, II An STŠ, Mostar, 151, 152; *Lojen Miroslav*, 7. a r. g. Varaždin, 151, 152, 153, 155 (djel.); *Павловић Б.* Светозарево, 152.

Razgovor s čitaocima

Čitaoci žele što bolji list. Urednici također. Oni se međutim dovoljno ne poznaju. Urednici ne znaju uvijek za raspoloženja čitalaca, a čitaoci nisu sasvim upućeni u mogućnosti redakcije. Potreban je jači kontakt. Stoga smo se obratili sedmorici čitalaca. Odabrali smo ih između naših najmarljivijih rješavatelja. Zamolili smo ih, da nam jave sve što o listu misle. Želje, kritike, pitanja, prijedloge.

Sve što leži na srcu njima i njihovim drugovima u školi. Pisali su nam. Odgovorili su ozbiljno i iscrpno. Njihove misli iznosimo u obliku zapisnika sa (zamišljenog) sastanka u redakciji. *Ivan* iz Karlovca, *Mladen* iz Ljubljane, *Biljana* iz Niša, *Petar* iz Dubrovnika, *Janez* iz Kočevja, *Milivoj* iz Zagreba i *Vojislav* iz Novog Sada razgovaraju s urednicima.

Ur.: Molimo najprije vaše opće mišljenje o listu.

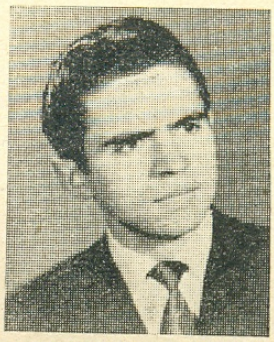
Milivoj: List je kvalitetan, iz broja u broj sve bolji. U posljednjih nekoliko brojeva uopće nema slabih mjesta.

Janez: Na splošno sem zadovoljen z listom.

Biljana: Od svih časopisa, koje čitam, najviše me privlači Matematičko-fizički list. Otkad sam poslala prvi zadatak, matematika mi je najmiliji predmet.

Vojislav: List veoma cenim i smatram da dostojno igra svoju ulogu.

Ivan: Za svoj matematički odgoj neizrecivo sam mu zahvalan.



Basar Ivan, 8. r. g. Karlovac

Petar: List mi je najdraži časopis i velika zabava.

Ur.: Sve ovo rado čujemo. No voljeli bismo znati i vaše konkretne primjedbe. Počnimo s člancima.

Mladen: Zanimale bi nas osnove infinitezimalnega računa, zlasti v svezi z njegovo uporabo v fiziki.

Petar: Slažem se, već i zato što smo ga ove godine počeli učiti.

Janez: Da bi list še razširili, bi morali objavljati članke tudi iz drugih področij, ki niso v listu zastupana (verjetnostni račun, teorija števil, . . .).

Vojislav: Ja mislim da treba uglavnom produbljivati gradivo. Na člancima iz već zaokrugljenog gradiva čitalac izoštrava svoje pretstave i oseća se nekako slobodnije.

Ur.: U uvodnom članku (god. I., br. 1) o zadatku našeg lista najavljeno je, da će se u člancima donositi u produbljenom i proširenom obliku gradivo iz raznih područja matematike i fizike pristupačno učeniku. Trudit ćemo se i nadalje da izvršavamo to obećanje. Tako ćemo zadovoljiti oba vaša gledišta.

Gros Mladen, 7. r. kl. g. Ljubljana

Petar: Moglo bi se povezati neke zadatke s člancima u listu te bi tako đaci bili primorani da prouče članak, ako žele riješiti zadatak. Primjer: zadatak 304. i članak N. Ćirića. Kad bi ovakvi slučajevi bili češći, uspjeh bi bio veći.

Biljana: Neki učenici su nezadovoljni što još ne razumeju neke stvari. Treba da budu strpljivi i da čuvaju časopis za kasnije razrede. Tada će im i ti članci biti jasni.

Vojislav: Mislim da bi trebalo obratiti pažnju na stereometriju. Članci treba da pouče čitaoca da što bliže i razumljivije sagleda prostor.

Janez: Mene posebno najbolj zanima analitična geometrija v prostoru.

Biljana: Volela bih da više znam o istoriji matematike. A mnogi moji drugovi bi želeli da pišete nešto o tome kako se uči matematika.

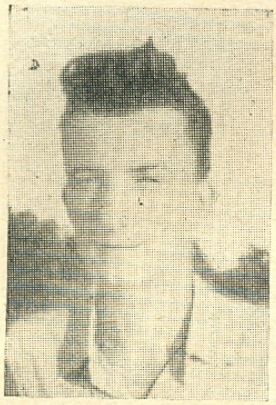
Jeremić Biljana, 6. r. g. Niš

Ur.: U idućem godištu bit će im želja ispunjena.

Milivoj: Mislim da bi vrlo interesantan bio neki članak o listovima, koji su slični Mat. fiz. listu.

Ur.: Što saznamo, saznat će i čitaoci. Nego: fiziku ste tek okrznuli. Ne bi li nešto više o njoj?

Biljana: Mnogo nam se sviđa što ste štampali o veštačkom satelitu.



Kulišić Petar, 8. r. g. Dubrovnik

Milivoj: Vrlo bih volio da donesete neki prikaz o najnovijim istraživanjima prof. Heisenberga.

Ivan: Najviše me interesiraju teme iz atomske fizike, a ta želja svakako mi je ispunjena, jer se u listu te teme i obrađuju.

Ur.: I to prilično. Svakako da ne smijemo zanemariti ostala područja.

Vojislav: Potrebno je uneti što više teorije u pojedine članke, raspravljati o sistematizaciji zakona prirode, treba izazvati u čitaocu želju da traži opštefizičke zakonitosti. Za to pozdravljam članke kao na pr. »Šta je masa« i sl.

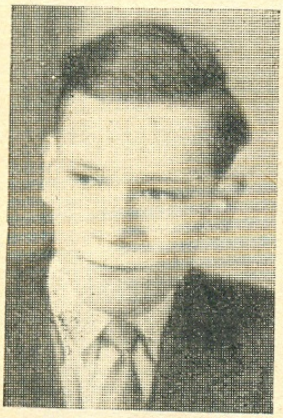
Petar: Teme, u kojima je fizika matematički obrađena, mogle bi korisno poslužiti kao seminarske teme. Uopće mislim da Matematičko-fizički list treba da više uđe u nastavu matematike i fizike, naročito u seminarski rad.

Mladen: Obenem s svojimi sošolci smatram da bi bilo koristno, če bi list prinašal tudi opise pripravljanja fizikalnih poskusov, ki bi se dali izvesti v šolskih fizikalnih laboratorijih.

Ur.: Nastojat ćemo, da u svakom broju bude rubrika »Iz moje radionice i laboratorija«.

Ivan: Premalo je zadataka iz fizike. Čudim se što ima dosta malo rješavatelja tih zadataka.

Ur.: I mi se donekle čudimo. No donekle i ne, jer učenici nisu još dovoljno navikli na zadatke iz fizike u školama. Zasad ostajemo kod pet fizičkih zadataka po broju. Vremenom će svakako sazreti uslovi za povećanje. Upozorili bismo vas na neke podatke: Zadatak br. 155 (uzet iz jednog udžbenika fizike za osmogodišnje škole!) riješilo je 14 učenika. Ukupno je bilo 32 rješavatelja fizičkih zadataka iz 3. broja. Rješenja matematičkih zadataka iz istog broja poslalo je 78 učenika.



Lesjak Janez, 6. r. g. Kočevje

Milivoj: I to je malen broj.

Ur.: Jest, ako se uzme u obzir, da je broj pretplatnika na naš list prešao 13500.

Janez: O matematičnih nalogah moram reči da so dobre in zanimive, edinole da je nekoliko preveč poudarka na enačbah.

Mladen: Najzanimivejše in obenem najkoristnejše se zde meni kot sošolcem matematične naloge pri katerih pride pri reševanju v poštev kvadratna funkcija in njena diskusija.

Ur.: Protegni ljubav na funkciju uopće, pa ćeš osjetiti još više radosti.

Mladen: Pri nalogah iz elektrike se čuti da so bolj ali manj enostranske in da ne vključujejo nalog iz poglavjih kot so na pr. elektromagnetizem, elektromagnetna indukcija itd.

Ur.: Rubrika »Zadaci i rješenja« pokazala se kao centralno mjesto za učeničku suradnju. To će i ostati. Povremeno su se učenici javljali i u rubrici »Iz moje radionice . . .«. Ne bi li se njihova suradnja mogla na neki način još proširiti?

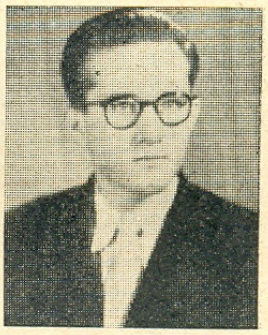
Milivoj: Ne bi trebalo.

Vojislav: Mislim da je dovoljna učenička saradnja kakva je dosad bila. Možda bi bilo dobro proglasiti nekoliko težih zadataka, što opštijih problema kod kojih se traži što duhovitije rešenje i štampati više rešenja.

Ur.: Gdjekad smo objavljivali i više rješenja, na pr. u posljednja dva godišta kod zadataka 225, 232, 234, 235, 238, 260, 300, 301. Ukoliko prostor dopusti radit ćemo to i češće.

Petar: Učenici bi i sami mogli postavljati zadatke u listu.

Ur.: Ako budu dobri, vrlo rado ćemo objaviti.



Miketinac Milivoj, 8. r. III. gimn. Zagreb

Ivan: Ja mislim, da se odgojna snaga lista može pojačati, ako bi se povećala učenička suradnja. (Jasno je, da članci ne bi smjeli biti prepisani iz matemat. i fiz. knjiga). Time bi se naročito proširila stvaralačka aktivnost omladine. Višak ideja, koji se javlja prilikom rješavanja zadataka, mogao bi se upotrebiti za stvaranje zanimljivih članaka. Jasno je, da ti članci ne bi imali naročito strogu naučnu vrijednost, ali bi u njima bio popularnim stilom izražen zanimljiv put otkrića. Uredništvo bi dobilo možda prevelik posao: trebalo bi odjeljivati uspjele od neuspjelih članaka, trebalo bi imati mnogo strpljenja i t. d. Ali se nadam i sa svoje strane molim Uredništvo da bi se i na ovaj način žrtvovalo za matematički odgoj omladine.

Ur.: Ivan nas malo straši, no mi se ne damo. Prilozi ne moraju odmah biti »debeli«. Rubrika »Zanimljivosti . . .« široka je. Ona čeka.

Janez: Bilo bi koristno uvesti novo rubriko. Tu bi bili odgovori na vprašanja, ki bi jih pošiljali bralci lista.

Petar: Makar na pola stranice.

Biljana: U časopisu druge godine čitala sam odgovore na pitanja.

Ur.: Uredništvo će (kao i dosada) rado posebnim pismom odgovarati pojedincima. Na pitanja općeg značenja odgovarat ćemo preko lista.

Još smo o svačem razgovarali. Neki su molili čvršće datume izlaženja lista i, s tim u vezi, čvršće rokove za slanje rješenja. Tu ima teškoća, jer datum izlaska lista ne ovisi samo o redakciji već i o štampariji. I čitaoci mogu pomoći brzim naručivanjem u početku školske godine!

Mudrinski Vojislav, 8. r. g. Novi Sad

Mnogi bi voljeli više od 4 broja godišnje. Zasad je to tehnički neizvedivo, iako materijala ima u izobilju.

Izražena je i želja za jačim i ljepšim koricama. Razmislit ćemo, jer bi to poskupilo list.

Palo je i pitanje: kako se dijele nagrade? Odgovor: za križaljku odlučuje ždrijeb između ispravnih rješenja, dok se nagrade na svršetku školske godine rješavateljima dijele prema zasluzi, t. j. prema broju i kvaliteti rješenja.

Našim mladim drugovima zahvaljujemo na razgovoru.

Prostor nam nije dao, da porazgovorimo s više vrijednih čitalaca, koji zacijelo također imaju korisnih prijedloga. Molimo, da ih ne taje. Sugestije će svakako biti i različite. Mogu biti i protivurječne. Ne mari. Redakcija će već izvući »najveću zajedničku mjeru«. Ovakvi razgovori, izmjene misli osvježavaju. Putokaz su i suradnicima.

Ur.

Zadaci na ispitu zrelosti u škol. god. 1956./57.

1. Realni koeficienti a, b, c enačbe $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ so členi rastočega geometrijskega zaporedja. Njihova vsota je 14, vsota njihovih kvadratov pa 84. Poišči koeficiente in reši enačbo!

2. Nad krogom z radijem r postavi na vsako stran pokončni stožec tako, da tvorita stranici stožca s krožno ravnino kota α_1 oziroma α_2. Izrazi površino in prostornino stožca kot funkcijo r, α_1 in α_2!

3. Premica $x - 2y + 8 = 0$ je skupna tangenta elipse $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ in konfokalne parabole $y^2 - 2px = 0$. Poišči enačbi obeh krivulj, obe dotikališči in kot, pod katerim se sekata obe krivulji!

8. g. Ljubljana

1. Poišči tangenti na krog $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 5 = 0$ iz tiste točke na premici $x + y - 9 = 0$, ki je krogu najbližja, ter določi dolžino loka med dotikališčema!

2. V enakokrakem trapezu meri kot ob spodnji osnovnici $65^0\,25'$, osnovnici pa 42,6 in 9,6 cm. Trapez se zavrti za 360^0 okoli večje osnovnice. Koliki sta površina in prostornina nastale vrtenine? Dokaži, da se tej vrtenini krogla ne da očrtati!

3. Za katere vrednosti količine p ima kvadratna enačba $x^2 - 4px + 8p^2 - 4p - 24 = 0$ realna korena? Pri katerih vrednostih od teh ima enačba a) oba korena pozitivna, b) oba korena negativna in c) en koren pozitiven in en negativen?

2. g. Celje

1. Skozi teme parabole $y^2 = 6x$ potegni premico, ki oklepa z abscisno osjo kot 30^0. Na parabolinem loku, ki ga odreže premica, določi točko z največjo razdaljo od premice. Določi tudi enačbo kroga, ki gre skozi to točko in presečišči premice s parabolo!

2. Trikotnik s stranico $b = 15\ cm$ in kotoma $\alpha = 54^0\,36'$ in $\gamma = 74^0\,54'$ se zavrti okrog b. Izračunaj površino in prostornino nastale vrtenine!

3. Tri števila, katerih produkt je 1000, vsota kvadratov 525, tvorijo geometrijsko zaporedje. Določi ta števila!

Gimnazija v Ptuju

Nagrađeni rješavatelji zadataka iz matematike i fizike

Redakcija Mat. fiz. lista nagradila je zbog marljivog i uspješnog rješavanja zadataka raznim matematičkim knjigama ove učenike:

Baličević Ivana, 8b r. g. Vukovar; *Basar Ivana*, 8b r. g. Karlovac; *Hendeković Josipa*, 7b r. 2. g. Zagreb; *Janev Ratka*, 8. kl. g. »J. B. Tito«, Skopje; *Jeremić Biljanu*, 6_4 r. g. »Sv. Marković«, Niš; *Jeremić Đurđa*, 6_3 r. g. »Sv. Marković«, Niš; *Kirić Miodraga*, 6_3 r. 2. g. Zrenjanin; *Kovač Antala*, 7b r. g. Sombor; *Kulišić Petra*, 8a r. g. Dubrovnik; *Lesjak Janeza*, 6. r. g. Kočevje; *Maček Vilka*, 5. r. kl. g. Ljubljana; *Miketinac Milivoja*, 8d r. 3. g., Zagreb; *Petričević Josipa*, 8d r. 3. g., Zagreb; *Radolović Josipa*, 8 r. g. »B. Semelic«, Pula; *Skender Davorina*, 8d r. 3. g., Zagreb; *Stojanović Danila*, 8b r. g., Čačak; *Vračarić Mirjanu*, 7. r. g., Sombor; *Zlobec Sanja*, 8c r. 1. g., Zagreb.

Raznim knjigama iz područja fizike nagrađeni su ovi učenici:

Basar Ivan, 8b r. g., Karlovac; *Gros Mladen*, 7a r. kl. g., Ljubljana; *Hendeković Josip*, 7b r. 2. g., Zagreb; *Kulišić Petar*, 8a r. g., Dubrovnik; *Lojen Miroslav*, 7a r. g., Varaždin; *Miketinac Milivoj*, 8d r. 3. g., Zagreb; *Petričević Josip*, 8d 3. g., Zagreb; *Stojanović Danilo*, 8b r. g., Čačak; *Todorović Milenko*, 4b STŠ, Mostar.